

EIN BEITRAG ZUR DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONALE DES
KOMPLEXEN WEISSEN RAUSCHENS

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Technischen Universität Carolo - Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte
D i s s e r t a t i o n

von Friedrich Jondral
aus Helmstedt

Setzen !

Referent : Prof. Dr. Ernst Henze

Korreferent : Prof. Dr. Takeyuki Hida

Eingereicht am : 3. Oktober 1978

Mündliche Prüfung am: 12. Januar 1979

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG	5
2. GRUNDLAGEN	
2.1 Schnell fallende Testfunktionen und temperierte Distributionen	7
2.2 Überblick über die Theorie des komplexen weißen Rauschens	10
3. GLEICHMÄSSIG DICHT E KOORDINATENSYSTEME IN DEN KOMPLEXEN MEHRFACHEN WIENER - INTEGRAL EN	22
4. VERALLGEMEINERTE FUNKTIONALE DES KOMPLEXEN WEISSEN RAUSCHENS	
4.1 Verallgemeinerte Funktionale	28
4.2 Komplexe zufällige Maße	38
5. FUNKTIONALE AUF $\mathfrak{L}_C$	
5.1 Fréchet - und Gâteaux - Differentiale	42
5.2 Analytische Funktionale von $\mathfrak{L}_C$ nach $\mathbb{C}$	44
5.3 Analytische Funktionale des komplexen weißen Rauschens im Sinne von Gâteaux	59
6. DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONALE DES KOMPLEXEN WEISSEN RAUSCHENS	62
ANHANG	77
LITERATURVERZEICHNIS	79

1. EINLEITUNG

In einigen neueren Arbeiten ([13], [15], [17]) und in der englischen Fassung seines Buches [19] beschäftigt sich T. Hida mit einer Differential- und Integralrechnung auf dem Raum (L^2) der quadratintegrablen Funktionale des reellen weißen Rauschens. Es liegt nun nahe, ähnliche Überlegungen für den Fall des komplexen weißen Rauschens anzustellen, d.h. eine Differential- und Integralrechnung auf dem Hilbertraum $(L^2_C) = L^2_C(\mathcal{S}_C^*, \nu)$ der Menge aller komplexwertigen Funktionale des komplexen weißen Rauschens, die endliche Varianzen besitzen, zu diskutieren. $\mathcal{S}_C^*$ ist der Schwartzsche Raum der temperierten Distributionen, ν das auf $\mathcal{S}_C^*$ eingeführte Maß des komplexen weißen Rauschens, das mit Hilfe des Satzes von Bochner und Minlos (s. Hida [16], [18]) über das charakteristische Funktional

$$C(\zeta) = \int_{\mathcal{S}_C^*} e^{i\langle z, \zeta \rangle + i\overline{\langle z, \zeta \rangle}} d\nu(z) = e^{-||\zeta||^2}, \quad \zeta \in \mathcal{S}_C, \quad i = \sqrt{-1},$$

definiert wird.

Im Abschnitt 2 werden die notwendigen Hilfsmittel aus der Theorie des komplexen weißen Rauschens bereitgestellt. Besonders wichtig sind dabei die Integraldarstellung eines Brownschen Funktional und die Wiener - Itô - Zerlegung des Raumes (L^2_C) .

Der Abschnitt 3 befaßt sich mit dem Koordinatensystem, in dem die Brownschen Funktionale dargestellt werden müssen, um die vorgeschlagene Differential- und Integralrechnung durchführen zu können. Es stellt sich heraus, daß grob gesagt das System $\{B^*(t); t \in \mathbb{R}\}$ ein geeignetes Koordinatensystem liefert.

Mit diesem System und unter Zuhilfenahme der Theorie der Sobolevräume gebrochener Ordnung (s. Lions, Magenes [26]) und der Integraldarstellung für komplexe Brownsche Funktionale ergibt sich im Abschnitt 4 die Definition der verallgemeinerten komplexen Brownschen Funktionale.

Im fünften Abschnitt wird auf den Begriff des analytischen Funktionals des komplexen weißen Rauschens im Sinne von Gâteaux eingegangen. Es wird gezeigt, daß sich die Überlegungen von A. E. Taylor [29], der analytische Funktionale von einem Banachraum E in einen anderen Banachraum E' betrachtete, auch auf den vorliegenden Fall anwenden lassen, in dem Funktionale, die vom nicht normierten Raum $\mathcal{S}_C$ der schnell fallenden Testfunktionen nach $\mathbb{C}$ abbilden, behandelt werden.

Unter Verwendung des Begriffes der Funktionalableitung im Sinne von P. Lévy (s. Lévy [24]) wird schließlich im sechsten Abschnitt die $\frac{d}{dz(t)}$ - Ableitung des Brownschen Funktionals $\varphi(z)$ betrachtet. Dabei ergibt sich zwangsläufig die Erweiterung des Lévy - Laplace - Operators vom reellen auf den komplexen Fall und damit natürlich auch die Definition des Begriffes „harmonisches Funktional des komplexen weißen Rauschens“.

2. GRUNDLAGEN

2.1 Schnell fallende Testfunktionen und temperierte Distributionen

Mit $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$ wird der Raum aller beliebig oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen n reeller Veränderlicher, die zusammen mit ihren sämtlichen Ableitungen für $|(t_1, t_2, \dots, t_n)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n t_j^2} = |t| \rightarrow \infty$ stärker als jede Potenz von $\frac{1}{|t|}$ gegen Null gehen, bezeichnet. Statt $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^1)$ wird oft nur kurz $\mathcal{L}_c$ geschrieben. Für eine Funktion $\zeta(t) \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$ gilt also

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t^k D^\alpha \zeta(t)| = 0 \quad \text{für alle } \alpha \text{ und alle } k.$$

α und k sind n - Multiindizes und es gelten die Vereinbarungen

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_n^{\alpha_n}} \quad \text{mit } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

$$t^k := t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n}.$$

Durch Einführung des Normensystems

$$\|\zeta\|_p = \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + |t|^2)^p |D^\alpha \zeta(t)|$$

wird $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$ zu einem abzählbar normierten Raum.

Die Topologie von $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$ kann also über die Konvergenz von Folgen gekennzeichnet werden: Die Folge $\{\zeta_k(t)\}$ heißt konvergent gegen $\zeta(t)$, wenn $\{\zeta_k(t)\}$ und die Ableitungen beliebiger Ordnung der Funktionen $\zeta_k(t)$ gegen $\zeta(t)$ und die entsprechenden Ableitungen gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ konvergieren und zusätzlich in

den Abschätzungen

$$|t|^\beta |D^\alpha \zeta_\kappa(t)| < C_{\alpha\beta}$$

die Konstanten $C_{\alpha\beta}$ unabhängig von κ gewählt werden können.

Bezüglich der durch diese Konvergenz beschriebenen Topologie ist $\mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ vollständig.

Ein System von Nullumgebungen in $\mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$V(m,p;\varepsilon) = \{\zeta; \zeta \in \mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n), \sup_t |(1+|t|^2)^p D^\alpha \zeta(t)| < \varepsilon \quad \forall |\alpha| \leq m\},$$

$m, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \varepsilon > 0.$

Der Raum $\mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, d.h. zu jedem Punkt aus $\mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ existiert eine Basis von Umgebungen, die nur abzählbar viele Umgebungen enthält.

$\mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ ist ein topologischer Vektorraum, m.a.W.: Er ist Hausdorffsch und Addition sowie Multiplikation mit Skalaren sind stetige Operationen.

Eine Teilmenge $M \subset \mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ heißt beschränkt, wenn zu jeder Nullumgebung V ein $\gamma > 0$ existiert, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geq \gamma$, $M \subset \lambda V$ gilt.

$\mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ ist ein vollkommener Raum (s. Gelfand, Schilow [4], Band 2, S.75), jede beschränkte Menge in $\mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ ist also kompakt.

Als topologischer Vektorraum ist $\mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ regulär: Zu jedem Punkt $\zeta \in \mathfrak{L}_C(\mathbb{R}^n)$ und jeder Umgebung U von ζ existiert eine Umgebung $V \subset U$ von ζ , so daß mit V auch $\overline{V}$, der Abschluß von V , in U liegt.

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(\zeta(t)) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,t)} \zeta(t) dt,$$

$$(x,t) = \sum_{j=1}^n x_j t_j, \quad \zeta(t) \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n),$$

ist eine topologische Abbildung von $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$.

Der Dualraum $\mathcal{L}_c^*(\mathbb{R}^n)$ von $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$ heißt Raum der temperierten Distributionen. Die Fouriertransformation für Distributionen wird erklärt durch

$$(\mathcal{F}(F), \varphi) = (F, \mathcal{F}(\varphi)) \quad \text{für } F \in \mathcal{L}_c^*(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n).$$

$(F, \mathcal{F}(\varphi))$ bedeutet dabei die Anwendung von F auf die Testfunktion $\mathcal{F}(\varphi)$. Die Fouriertransformation für Distributionen ist eine topologische Abbildung von $\mathcal{L}_c^*(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{L}_c^*(\mathbb{R}^n)$.

Da $\mathcal{L}_c^*$ der Dualraum eines nuklearen Raumes ist, kann mit Hilfe des Satzes von Bochner und Minlos auf $\mathcal{L}_c^*$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert werden.

2.2 Überblick über die Theorie des komplexen weißen Rauschens

Im folgenden sollen einige Hilfsmittel bereitgestellt werden. Beweise für die aufgeführten Aussagen sind z.B. in dem Buch [19] von T. Hida zu finden.

Definition 2.1:

Eine Zufallsvariable $X(\omega)$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{B}', P')$, die die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0,$$

besitzt, heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ . Man sagt auch, die Zufallsvariable X habe eine $N(\mu, \sigma^2)$ - Verteilung.

$Z(\omega)$ sei nun eine komplexwertige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$, die den Erwartungswert m ($m \in \mathbb{C}$) besitze. Werden mit $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ der Real- bzw. der Imaginärteil von $Z(\omega) - m$ bezeichnet, so gilt:

$$Z(\omega) = m + X(\omega) + iY(\omega) .$$

Definition 2.2:

$Z(\omega) = m + X(\omega) + iY(\omega)$ sei eine komplexwertige Zufallsvariable. Wenn der Zufallsvektor (X, Y) eine rotationsinvariante zweidimensionale Normalverteilung besitzt, heißt $Z(\omega)$ eine komplexe Gaußsche Zufallsvariable.

Bemerkung: Für die Zufallsvariablen X und Y aus Definition 2.2 gilt:

- (i) X und Y sind unabhängig,
- (ii) $EX = EY = 0$,
- (iii) $D^2X = D^2Y$.

Definition 2.3:

Die Familie $\mathbf{Z} = \{Z_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ komplexwertiger Zufallsvariabler auf $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ heißt komplexes Gaußsches System, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Koeffizienten $c_j \in \mathbb{C}$ jede endliche Summe $\sum_{j=1}^n c_j Z_{\lambda_j}(\omega)$ eine komplexe Gaußsche Zufallsvariable ist.

Bemerkung: Für beliebige Familien Gaußscher Zufallsvariabler $\{X_\lambda\}$ und $\{Y_\lambda\}$ ist ein komplexes Gaußsches System durch die Vorgabe von Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix nicht eindeutig bestimmt. Daher muß in Definition 2.2 die Rotationsinvarianz der Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) gefordert werden.

Die komplexen Gaußschen Systeme besitzen die folgenden Eigenschaften:

- (1) Ist $\mathbf{Z}$ ein komplexes Gaußsches System, dann ist jedes Untersystem $\mathbf{Z}' \subset \mathbf{Z}$ wieder ein komplexes Gaußsches System.
- (2) Mit $\mathbf{Z}$ ist auch $\bar{\mathbf{Z}} := \{\bar{Z}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ ein komplexes Gaußsches System.
- (3) Ist $\mathbf{Z} = \{Z_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie unabhängiger komplexer normalverteilter Zufallsvariabler, so ist $\mathbf{Z}$ ein komplexes Gaußsches System.
- (4) $\mathbf{Z} = \{Z_\lambda; Z_\lambda = m_\lambda + X_\lambda + iY_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ sei komplexes Gaußsches System, dann sind $\mathbf{X} := \{X_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$, $\mathbf{Y} := \{Y_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ und $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ reelle Gaußsche Systeme.

Bemerkung: Die Familie $\mathbf{X} = \{X_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ reellwertiger Zufallsvariabler heißt reelles Gaußsches System, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$

und beliebige Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$ jede endliche Summe $\sum_{j=1}^n a_j X_{\lambda_j}$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist.

(5) $\mathbf{Z}$ sei komplexes Gaußsches System und $Z_1, Z_2 \in \mathbf{Z}$:

Z_1 und Z_2 sind genau dann unabhängig, wenn

$$E\{(Z_1 - m_1)(\overline{Z_2 - m_2})\} = 0 \text{ ist.}$$

(6) Die Kovarianzmatrix $V = \{v_{\lambda, \mu}; \lambda, \mu \in \Lambda\}$ des komplexen Gaußschen Systems $\mathbf{Z}$ ist nichtnegativ definit. Darüberhinaus gilt mit $Z_\lambda = m_\lambda + X_\lambda + iY_\lambda$:

$$\begin{aligned} E(X_\lambda X_\mu) &= E(Y_\lambda Y_\mu) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(v_{\lambda, \mu}), \\ -E(X_\lambda Y_\mu) &= E(Y_\lambda X_\mu) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(v_{\lambda, \mu}). \end{aligned}$$

Satz 2.1:

Zu jedem Vektor $m = (m_\lambda; \lambda \in \Lambda, m_\lambda \in \mathbb{C})$ und jeder nichtnegativ definiten Matrix $V = (v_{\lambda, \mu}; \lambda, \mu \in \Lambda, v_{\lambda, \mu} \in \mathbb{C})$ existiert ein eindeutig bestimmtes komplexes Gaußsches System $\mathbf{Z}$, dessen Erwartungswertvektor bzw. Kovarianzmatrix m bzw. V sind.

Für eine komplexe Gaußsche Zufallsvariable $Z(\omega)$ gilt:

$$E\{e^{i(tZ+s\bar{Z})}\} = e^{i(tm+s\bar{m})-ts\sigma^2}, \quad t, s \in \mathbb{C};$$

$$m = E(Z); \quad \sigma^2 = E(|Z - m|^2).$$

Ist $E(Z) = 0$, ergibt sich:

$$E(Z^n) = 0 \quad \forall n > 0,$$

$$E(Z^n \bar{Z}^m) = \delta_{m,n} n! \{E(|Z|^2)\}^n.$$

($\delta_{m,n}$ ist das Kroneckersche Symbol.)

Beispiel:

$\{B_1(t); t \geq 0\}$ und $\{B_2(t); t \geq 0\}$ seien unabhängige Brownsche Bewegungen (s. Lévy [25]), aus denen die Zufallsvariablen

$$Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{B_1(t) + iB_2(t)\}, \quad t \geq 0,$$

konstruiert werden. Die Familie $\{Z(t); t \geq 0\}$ ist dann ein komplexes Gaußsches System. $\{Z(t); t \geq 0\}$ besitzt unabhängige Zuwächse und es gilt $E(|Z(t)|^2) = t$ für alle t .

Definition 2.4:

Das System

$$\{Z(t, \omega); Z(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{B_1(t, \omega) + iB_2(t, \omega)\}, t \geq 0\}$$

heißt komplexe Brownsche Bewegung.

Gegeben sei die komplexe Brownsche Bewegung $\{Z(t)\}$, dann sollen das System verallgemeinerter Funktionen $\{Z^*(t)\}$ und Funktionale $\varphi(Z^*(t))$ auf diesem System betrachtet werden, wobei der Prozeß $\{Z(t)\}$ als direkt gegeben vorausgesetzt wird.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\{B^*(t)\}$ ergibt sich im Fall des reellen weißen Rauschens aus der Definition des verallgemeinerten stochastischen Prozesses $(\mathfrak{L}^*, \mu)$. Dabei wurde das Gelfandsche Raumtripel (s. Gelfand, Wilenkin [4], Band 4) $\mathfrak{L} \subset L^2(\mathbb{R}^1) \subset \mathfrak{L}^*$ betrachtet und auf $\mathfrak{L}^*$, dem Dualraum des nuklearen Raums $\mathfrak{L}$ der schnell fallenden reellwertigen Testfunktionen, das Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit Hilfe des charakteristischen Funktionals

$$C_r(\xi) = \int_{\mathfrak{L}^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x) = \exp\{-\frac{1}{2}||\xi||^2\}, \quad \xi \in \mathfrak{L},$$

definiert (s. Hida [18]).

Ausgehend von dem Paar konjugierter Räume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^*$ wird die folgende Komplexifizierung vorgenommen:

$$\mathcal{H}_C = \mathcal{H} + i\mathcal{H} \quad , \quad (\mathcal{H}_C \simeq \mathcal{H} \times \mathcal{H}) ,$$

$$\mathcal{H}_C^* = \mathcal{H}^* + i\mathcal{H}^* .$$

Sind nun $\zeta \in \mathcal{H}_C$ und $z \in \mathcal{H}_C^*$, so können diese Elemente in der Form

$$\zeta = \xi + i\eta \quad ; \quad \xi, \eta \in \mathcal{H} ;$$

$$z = x + iy \quad ; \quad x, y \in \mathcal{H}^* ;$$

geschrieben werden.

Die kanonische Bilinearform $\langle x, \xi \rangle$, die $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^*$ verbindet, kann auf natürliche Weise zur kanonischen Bilinearform $\langle z, \zeta \rangle$ zwischen $\mathcal{H}_C$ und $\mathcal{H}_C^*$, die tatsächlich konjugiert sind (s. Hida [16]), erweitert werden. Aus den obigen Darstellungen für z und ζ folgt:

$$\begin{aligned} \langle z, \zeta \rangle &= \langle x, \xi \rangle + \langle y, \eta \rangle + i(-\langle x, \eta \rangle + \langle y, \xi \rangle) := \\ &:= X(z) + iY(z) . \end{aligned}$$

Auf $\mathcal{H}^*$ ($\simeq i\mathcal{H}^*$) werden nun die Maße μ_1 und μ_2 eingeführt, aus denen dann das Produktmaß $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$ konstruiert wird. Die Maße μ_1 und μ_2 sind Gaußsche Maße, die beide die Varianz $\frac{1}{2}$ besitzen. Die kleinste von den Zylindermengen von $\mathcal{H}_C^*$ erzeugte σ - Algebra wird mit $\mathcal{B}$ bezeichnet. Mit $\mathcal{H}_C^*$, $\mathcal{B}$ und ν ergibt sich der Maßraum $(\mathcal{H}_C^*, \mathcal{B}, \nu)$.

Definition 2.5:

Der Maßraum $(\mathcal{H}_C^*, \mathcal{B}, \nu)$ heißt komplexes weißes Rauschen.

Definition 2.6:

$$C(\zeta) := \int_{\mathfrak{L}_C^*} e^{i\langle z, \zeta \rangle + i\overline{\langle z, \zeta \rangle}} dv(z) =$$

$$= e^{-||\zeta||^2}, \quad \zeta \in \mathfrak{L}_C, \quad ||\cdot|| \text{ } L_C^2(\mathbb{R}^1) \text{ - Norm,}$$

ist das charakteristische Funktional des auf $\mathfrak{L}_C^*$ definierten Maßes v .

Bemerkungen:

- (1) Jedes $z \in \mathfrak{L}_C^*$ kann nun als Realisierung von $Z^*(t, \omega)$ betrachtet werden.
- (2) Zur Abkürzung wird die folgende Schreibweise eingeführt:
 $(L_C^2) := L^2(\mathfrak{L}_C^*, \mathfrak{B}, v).$
- (3) Für festes $\zeta \in \mathfrak{L}_C$ ist $\langle z, \zeta \rangle$ als Funktion von z eine Zufallsvariable auf $(\mathfrak{L}_C^*, \mathfrak{B}, v)$, d.h. $\langle z, \zeta \rangle$ ist $\mathfrak{B}$ -meßbar.
- (4) In der Darstellung $\langle z, \zeta \rangle = X(z) + iY(z)$ sind, weil v das Produktmaß der Maße μ_1 und μ_2 des reellen weißen Rauschens, die beide die Varianz $\frac{1}{2}$ besitzen, ist, $X(z)$ und $Y(z)$ Summen von jeweils zwei unabhängigen Gaußschen Zufallsvariablen: $X(z)$ und $Y(z)$ haben beide eine $N(0, \frac{1}{2}\{||\xi||^2 + ||\eta||^2\})$ - Verteilung. Für die charakteristischen Funktionen $\Psi_{(X,Y)}(t,s)$ des Zufallsvektors $(X(z), Y(z))$ und $\Psi_X(t)$ bzw. $\Psi_Y(s)$ der Zufallsvariablen $X(z)$ bzw. $Y(z)$ gilt der Zusammenhang

$$\Psi_{(X,Y)}(t,s) = \Psi_X(t) \cdot \Psi_Y(s).$$

Daraus folgt die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X(z)$ und $Y(z)$. $\langle z, \zeta \rangle$ ist also eine komplexe Gaußsche Zufallsvariable.

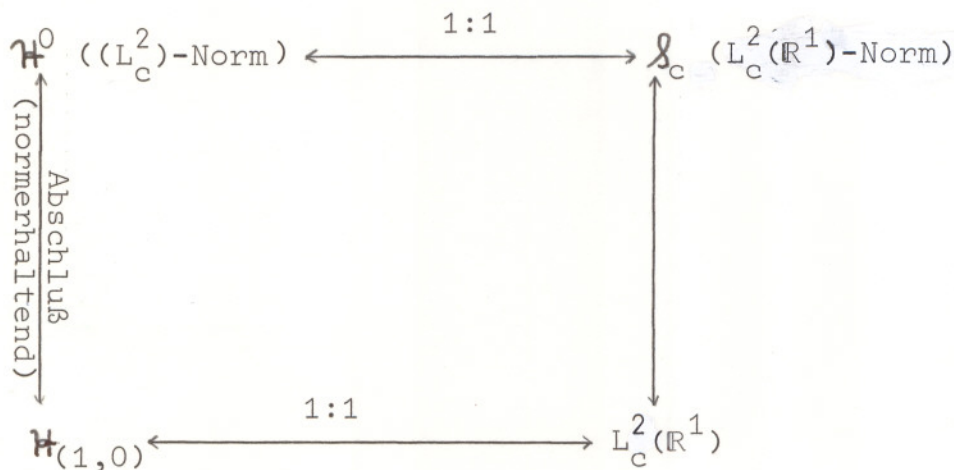
Die Zufallsvariablen der Form $\langle z, \zeta \rangle$ besitzen folgende Eigenschaften:

- (i) $E(\langle z, \zeta \rangle) = \int_{\mathfrak{L}_C^*} \langle z, \zeta \rangle \, dv(z) = 0,$
- (ii) $E(|\langle z, \zeta \rangle|^2) = ||\zeta||^2, \quad ||\cdot|| \text{ } L_C^2(\mathbb{R}^1) \text{ - Norm,}$
- (iii) $E(\langle z, \zeta_1 \rangle \overline{\langle z, \zeta_2 \rangle}) = (\zeta_1, \zeta_2),$

wobei $(\cdot, \cdot)$ das innere Produkt in $L_C^2(\mathbb{R}^1)$ ist.

Die Familie $\mathcal{H}^0 := \{\langle z, \zeta \rangle; \zeta \in \mathfrak{L}_C\}$ ist ein komplexes Gaußsches System auf $(\mathfrak{L}_C^*, \mathfrak{B}, v)$; der Abschluß von $\mathcal{H}^0$ in (L_C^2) ist wieder ein Gaußsches System und wird mit $\mathcal{H}_{(1,0)}$ bezeichnet:

$$\mathcal{H}_{(1,0)} = \{\langle z, f \rangle; f \in L_C^2(\mathbb{R}^1)\}$$



Genauso kann auch $\overline{\mathcal{H}^0} := \{\overline{\langle z, \zeta \rangle}; \zeta \in \mathfrak{L}_C\}$ betrachtet werden; der Abschluß von $\overline{\mathcal{H}^0}$ in $L_C^2(\mathbb{R}^1)$ wird $\mathcal{H}_{(0,1)}$ genannt. Dann gelten die Isomorphiebeziehungen:

$$\mathcal{H}_{(1,0)} \simeq L_C^2(\mathbb{R}^1)$$

$$\mathcal{H}_{(0,1)} \simeq \overline{L_C^2(\mathbb{R}^1)}$$

Bemerkung: In der zweiten Beziehung wird der Querstrich als Zeichen für das konjugiert Komplexe des Raumes $L_C^2(\mathbb{R}^1)$ natürlich nur formal geschrieben.

Es gilt $\mathcal{H}_{(1,0)} \perp \mathcal{H}_{(0,1)}$.

Definition 2.7:

$$\mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_{(1,0)} \oplus \mathcal{H}_{(0,1)}$$

heißt komplexes Wiener - Integral.

Bemerkung:

$$\mathcal{H}_1 \approx L_C^2(\mathbb{R}^1) \oplus \overline{L}_C^2(\mathbb{R}^1)$$

Wird in dem Polynom $P(t_1, t_2, \dots, t_n, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n)$, das komplexe Koeffizienten besitze, der Vektor $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ durch

$(\langle z, \zeta_1 \rangle, \langle z, \zeta_2 \rangle, \dots, \langle z, \zeta_n \rangle)$ ersetzt, heißt

$$\varphi(z) = P(\langle z, \zeta_1 \rangle, \langle z, \zeta_2 \rangle, \dots, \langle z, \zeta_n \rangle, \overline{\langle z, \zeta_1 \rangle}, \overline{\langle z, \zeta_2 \rangle}, \dots, \overline{\langle z, \zeta_n \rangle})$$

ein Polynom in $z, \bar{z}$. Das geordnete Paar (p, q) wird Grad des Polynoms P genannt, wenn P vom Grad p in $t_1, t_2, \dots, t_n$ und vom Grad q in $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$ ist.

Jedes Polynom in $z, \bar{z}$ ist Element von (L_C^2) .

Die Menge $\mathbf{P}$ der Polynome in $z, \bar{z}$ ist eine Algebra, darüberhinaus ist $\mathbf{P}$ dicht in (L_C^2) .

Ist $\{\omega_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem (abgekürzt: VONS) in $L_C^2(\mathbb{R}^1)$, dann ist das System der Polynome über $\{\omega_n\}$

$$\mathbf{P}(\{\omega_n\}) := \{\varphi(z); \varphi(z) = P(\langle z, \omega_{j_1} \rangle, \dots, \langle z, \omega_{j_n} \rangle, \overline{\langle z, \omega_{j_1} \rangle}, \dots, \overline{\langle z, \omega_{j_n} \rangle})\}$$

dicht in (L_C^2) .

Bevor nun auf die wichtige Rolle, die die komplexen Hermite - Polynome (Definition s. Itô [21]) in der Theorie des komplexen weißen Rauschens spielen, eingegangen wird, soll kurz die Menge der Exponentialfunktionale in $z, \bar{z}$ betrachtet werden:

$$\varphi(z) = e^{i\langle z, \zeta_1 \rangle + i\overline{\langle z, \zeta_2 \rangle}} \text{ mit } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{H}_C \text{ ist Element von } (L_C^2).$$

Die durch die Menge $\{e^{i\langle z, \zeta \rangle + i\overline{\langle z, \zeta \rangle}}, \zeta \in \mathcal{H}_C\}$ erzeugte Algebra $\mathbf{A}$ ist dicht in (L_C^2) .

Mit der Abkürzung $K(z, \zeta) = e^{i\langle z, \zeta \rangle + i\overline{\langle z, \zeta \rangle}}$ ergibt sich für $\varphi(z) \in (L_C^2)$:

$$\text{Gilt } \int_{\mathcal{H}_C^*} K(z, \zeta) \bar{\varphi}(z) dv(z) = 0 \text{ für alle } \zeta \in \mathcal{H}_C, \text{ so folgt}$$

$$\varphi(z) = 0 \text{ v- f.ü..}$$

Nun sei H_{p_k, q_k} das komplexe Hermite - Polynom vom Grad (p_k, q_k)

(die Definition und einige Rechenregeln für die komplexen Hermite - Polynome sind im Anhang zusammengestellt):

Satz 2.2:

Die Menge endlicher Produkte

$$\left\{ \prod_k \frac{1}{\sqrt{p_k! q_k!}} H_{p_k, q_k}(\langle z, \omega_{j_k} \rangle, \overline{\langle z, \omega_{j_k} \rangle}) \right\}$$

bildet ein VONS in (L_C^2) . ($\{\omega_n\}$ ist ein VONS in $L_C^2(\mathbb{R}^1)$.)

Drei wichtige Bezeichnungen müssen nun eingeführt werden:

Definition 2.8:

(a) Jedes endliche Produkt der Form

$$\prod_k \frac{1}{\sqrt{p_k! q_k!}} H_{p_k, q_k}(\langle z, \omega_{j_k} \rangle, \overline{\langle z, \omega_{j_k} \rangle})$$

wird ein Fourier - Hermite - Polynom über $\{\omega_n\}$ ge-

nannt; es besitzt den Grad $(\sum_k p_k, \sum_k q_k)$.

(b) Der von der Menge

$$\left\{ \prod_k \frac{1}{\sqrt{p_k! q_k!}} H_{p_k, q_k}(\langle z, \omega_{j_k} \rangle, \overline{\langle z, \omega_{j_k} \rangle}), \sum_k p_k = m, \sum_k q_k = n \right\}$$

aufgespannte Unterraum $\mathcal{H}_{(m,n)}$ von (L_C^2) heißt
komplexes mehrfaches Wiener - Integral vom Grad (m,n) .

(c) $\mathcal{H}_n := \sum_{k=0}^n \oplus \mathcal{H}_{(k,n-k)}$ ist das komplexe mehrfache

Wiener - Integral vom Grad n .

Es gilt der folgende wichtige

Satz 2.3: (Wiener - Itô - Zerlegung)

$$(L_C^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \left\{ \sum_{k=0}^n \oplus \mathcal{H}_{(k,n-k)} \right\}.$$

Die Transformation τ , die (L_C^2) auf einen Raum von Funktionalen über $\mathcal{J}_C$ abbildet, wird durch

$$\begin{aligned} (L_C^2) \ni \varphi(z) &\longrightarrow (\tau\varphi)(\zeta) = \int_{\mathcal{J}_C^*} e^{i\langle z, \zeta \rangle + i\overline{\langle z, \zeta \rangle}} \overline{\varphi}(z) \, dv(z) = \\ &= \int_{\mathcal{J}_C^*} K(z, \zeta) \overline{\varphi}(z) \, dv(z), \quad \zeta \in \mathcal{J}_C, \end{aligned}$$

definiert.

Beispiele:

(1) $1(z) \equiv 1 \in (L_C^2)$:

$$(\tau 1)(\zeta) = \int_{\mathcal{J}_C^*} K(z, \zeta) \, dv(z) = \int_{\mathcal{J}_C^*} \int_{\mathcal{J}_C^*} e^{2i\langle x, \xi \rangle + 2i\langle y, \eta \rangle} \, d\mu_1(x) d\mu_2(y) =$$

$$= e^{-\frac{1}{4}||2\xi||^2} e^{-\frac{1}{4}||2\eta||^2} = e^{-||\zeta||^2} = C(\zeta).$$

$$(2) \varphi(z) = H_{p,q}(\langle z, \omega \rangle, \overline{\langle z, \omega \rangle}), \quad ||\omega||=1,$$

$$(\tau\varphi)(\zeta) = i^{p+q} C(\zeta) (\omega, \zeta)^p (\zeta, \omega)^q.$$

$$(3) \varphi(z) = \prod_k \frac{1}{\sqrt{p_k! q_k!}} H_{p_k, q_k}(\langle z, \omega_{j_k} \rangle, \overline{\langle z, \omega_{j_k} \rangle}), \quad ||\omega_{j_k}||=1,$$

$$(\tau\varphi)(\zeta) = i^{\sum_k p_k + \sum_k q_k} C(\zeta) \prod_k \frac{1}{\sqrt{p_k! q_k!}} (\omega_{j_k}, \zeta)^{p_k} (\zeta, \omega_{j_k})^{q_k}.$$

Satz 2.4:

Zu jedem $\varphi \in \mathcal{H}_{(m,n)}$ existiert genau eine Funktion

$$F_\varphi \in \hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit}$$

$$(i) \quad (\tau\varphi)(\zeta) = i^{m+n} C(\zeta) (F_\varphi, \zeta^{m\otimes} \otimes \bar{\zeta}^{n\otimes})_{L_C^2(\mathbb{R}^{m+n})},$$

$$(ii) \quad ||\varphi||_{(L_C^2)} = \sqrt{m!n!} ||F_\varphi||_{L_C^2(\mathbb{R}^{m+n})}.$$

Bemerkung: $\hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m)$ bezeichnet den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen über dem $\mathbb{R}^m$, die symmetrisch in allen Argumenten sind. Die Funktion $F_\varphi(u_1, \dots, u_m; u_{m+1}, \dots, u_{m+n}) \in \hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n)$ ist also symmetrisch in den ersten m und in den letzten n Argumenten. Sie ist nicht in allen Argumenten symmetrisch, wenn $n > 0$ ist!

Folgerungen:

$$(1) \mathcal{H}_{(m,n)} \simeq \sqrt{m!} \hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \sqrt{n!} \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n),$$

$$(2) \quad (L_c^2) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \left(\sum_{k=0}^n \oplus \sqrt{(n-k)!k!} \hat{L}_c^2(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \bar{L}_c^2(\mathbb{R}^k) \right).$$

3. GLEICHMÄSSIG DICHTES KOORDINATENSYSTEME IN DEN KOMPLEXEN MEHRFACHEN WIENER - INTEGRALEN

Ein Ziel dieser Arbeit besteht darin, die Grundzüge einer Differential- und Integralrechnung auf (L^2_C) zu diskutieren, die in Übereinstimmung mit der Methode, die T. Hida in seinen Arbeiten „causal analysis“ nennt, steht. Um diese Methode einführen zu können, muß notwendigerweise ein geeignetes Koordinatensystem auf dem Raum $\mathcal{L}^*_C$, auf dem das Maß ν definiert ist, angegeben werden. Das gesuchte System soll so beschaffen sein, daß es in jedem komplexen mehrfachen Wiener - Integral $\mathcal{H}_{(p,q)}$ ein gleichmäßig dichtes Koordinatensystem liefert. Diese Voraussetzung garantiert, daß der im Abschnitt 6 definierte Lévy - Laplace - Operator auf den Räumen $\mathcal{H}_{(p,q)}$ von der Reihenfolge der Koordinaten unabhängig ist (vgl. Lévy [24], S. 247).

Zur Klärung des Begriffes „gleichmäßig dichtes Koordinatensystem“ sei das folgende Beispiel angeführt, das von P. Lévy stammt:

Es sei $\{\xi_n\}$ ein VONS in $L^2([0,1])$ und die Funktionen $\Psi_n(u,v)$ und $\Phi_n(u)$ seien definiert durch:

$$\Psi_n(u,v) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j(u) \xi_j(v),$$

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j^2(u).$$

Es gilt natürlich $\int_0^1 \int_0^1 \Psi_n^2(u,v) \, du \, dv = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (für $n \rightarrow \infty$), d.h.

$\Psi_n(u,v)$ konvergiert im Sinne der $L^2([0,1])$ - Konvergenz gegen

Null. Für $\Phi_n(u)$ gilt $\int_0^1 \Phi_n(u) \, du = 1$, woraus jedoch nicht

$\Phi_n(u) \rightarrow 1$ im Sinn der $L^1([0,1])$ - Konvergenz

folgt. Ist diese Forderung jedoch erfüllt, wie z.B. für das System

$$\{\xi_k\} = \{1, \sqrt{2} \sin 2k\pi t, \sqrt{2} \cos 2k\pi t; k \geq 1\}$$

in $L^2([0,1])$, so heißt das VONS $\{\xi_k\}$ gleichmäßig dicht.

Bemerkung: Z.B. ist im Raum $L^2(\mathbb{R}^1)$ das System $\{\xi_n\}$ mit

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(u) e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad n \geq 0,$$

ein gleichmäßig dichtes VONS. $H_n(u)$ ist das Hermite - Polynom der Ordnung n .

Nach Definition 2.8(b) bilden die Fourier - Hermite - Polynome der Ordnung (p,q) ein VONS in $\mathcal{H}_{(p,q)}$. Dieses System kommt jedoch für die hier angestellten Überlegungen nicht in Frage, da es den Nachteil hat, daß aus ihm die zeitliche Entwicklung bei der Analyse von Funktionalen der Brownschen Bewegung nicht explizit abgelesen werden kann.

Es sei nun $\mathcal{P}_n$ eine Zerlegung des Parameterintervalls $T \subset \mathbb{R}^1$ der komplexen Brownschen Bewegung, die durch die Version

$$B(t,z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{B_1(t,x) + iB_2(t,y)\} = \langle z, \chi_{[0,t]} \rangle$$

gegeben sei. Dabei sind $B_1(t,x)$ und $B_2(t,y)$ reelle Brownsche Bewegungen und $\chi_{[0,t]}$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[0,t]$. Der Einfachheit halber wird im folgenden das Einheitsintervall $T = [0,1]$ betrachtet. Es sei P_n eine Zerlegung von $[0,1]$ in n Teilintervalle, dann ist P_{n+1} feiner als P_n :

$$P_n = \{\Delta_j\}, \quad \Delta_j = [t_j, t_{j+1}], \quad |\Delta_j| = t_{j+1} - t_j.$$

Das Funktional

$$\Pi_n^2 f := \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2$$

heißt quadratische Variation der Funktion $f(t)$.

Für das Intervall $[0,1]$ gilt der

Hilfssatz 3.1:

Aus $\delta P_n = \max |t_{j+1} - t_j| \rightarrow 0$ (für $n \rightarrow \infty$) folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n^2 B(\cdot, z) = 1 \quad \text{v- f.ü..}$$

Beweis: S. Doob [3], S. 395.

Ist nun aber speziell $P_n = \{\Delta_j; |\Delta_j| = 2^{-n}\}$, ergibt sich mit

$$\Delta_j B = B(t_{j+1}, z) - B(t_j, z) = \langle z, \chi_{[t_{j+1}, t_j]} \rangle :$$

$$\sum_{j=1}^{2^n} |\Delta_j B|^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} |\sqrt{2^n} \Delta_j B|^2 \rightarrow 1 \quad \text{v- f.ü..}$$

Folgerung: Formal definiert $\{\frac{dB(t)}{\sqrt{dt}}\}$, das projektive System

von $\{\frac{\Delta_k B}{\sqrt{|\Delta_k|}}, \Delta_k \in \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n \text{ uniform}\}$, ein VONS in $\mathcal{H}_{(1,0)}$, das

gleichmäßig dicht ist.

Für $\mathcal{H}_{(0,1)}$ und das System $\{\frac{d\bar{B}(t)}{\sqrt{dt}}\}$ gilt eine entsprechende Aussage.

Ausgehend von dem so erklärten Koordinatensystem in $\mathcal{H}_{(1,0)}$

kann mit Hilfe der komplexen Fourier - Hermite - Polynome ein VONS in $\mathcal{H}_{(2,0)}$ konstruiert werden. Das System wird in

zwei Klassen eingeteilt:

$$(I) \quad \frac{dB(t_1)}{\sqrt{dt_1}} \frac{dB(t_2)}{\sqrt{dt_2}}, \quad t_1 \neq t_2,$$

$$(II) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{dB(t_1)}{\sqrt{dt_1}} \right)^2.$$

Die Einteilung in die Klassen (I) und (II) erklärt sich folgendermaßen: Betrachtet man (I) als zufälliges Maß auf dem $\mathbb{R}^1$, dann ergibt die Integration

$$\iint f(u,v) \frac{dB(u)}{\sqrt{du}} \frac{dB(v)}{\sqrt{dv}} \sqrt{du} \sqrt{dv},$$

$f(u,v) \in \hat{L}_C^2(\mathbb{R}^2)$, ein doppeltes komplexes Wiener - Integral.

Dagegen liefert eine entsprechende Integration bezüglich des durch (II) definierten zufälligen Maßes ein noch zu definierendes (s. Abschnitt 4) verallgemeinertes Funktional des komplexen weißen Rauschens.

Nach dem angegebenen Schema werden entsprechende Koordinatensysteme für alle $\mathcal{H}_{(p,q)}$ konstruiert; dabei wird wesentlich von den Eigenschaften der komplexen Hermite - Polynome Gebrauch gemacht. Die komplexen Hermite - Polynome mit Parameter werden definiert durch

$$H_{p,q}^*(z, \bar{z}; \sigma^2) := \frac{(-\sigma^2)^{p+q}}{p!q!} \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\sigma^2}\right) \frac{\partial^{p+q}}{\partial \bar{z}^p \partial z^q} \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\sigma^2}\right);$$

$$\sigma^2 > 0; p, q \geq 0.$$

Ihre erzeugende Funktion ist

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \bar{t}^p t^q H_{p,q}^*(z, \bar{z}; \sigma^2) = e^{-\sigma^2 t \bar{t} + t \bar{z} + \bar{t} z}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Spezialfälle:

$$H_{0,0}^*(z, \bar{z}; \sigma^2) = 1$$

$$H_{1,0}^*(z, \bar{z}; \sigma^2) = z$$

$$H_{1,1}^*(z, \bar{z}; \sigma^2) = z\bar{z} - \sigma^2$$

$$H_{2,1}^*(z, \bar{z}; \sigma^2) = \frac{1}{2}(\bar{z}z^2 - 2\sigma^2 z)$$

$$H_{2,2}^*(z, \bar{z}; \sigma^2) = \frac{1}{4}(\bar{z}^2 z^2 - 4\sigma^2 \bar{z}z + 2\sigma^4)$$

Als Koordinatensystem in $\mathcal{H}_{(p,q)}$ ergibt sich damit:

$$(I) \quad \prod_{j=1}^p \{H_{1,0}^*(B^*(t_j), \bar{B}^*(t_j); \frac{1}{dt_j}) \sqrt{dt_j}\} \times \\ \times \prod_{j=p+1}^{p+q} \{H_{0,1}^*(B^*(t_j), \bar{B}^*(t_j); \frac{1}{dt_j}) \sqrt{dt_j}\},$$

$$(II) \quad \prod_j \left\{ \frac{1}{\sqrt{p_j! q_j!}} H_{p_j, q_j}^*(B^*(t_j), \bar{B}^*(t_j); \frac{1}{dt_j}) \sqrt{dt_j} \right\}, \\ \sum_j p_j = p, \quad \sum_j q_j = q,$$

alle t_j verschieden.

Wie im reellen Fall handelt es sich bei den in diesem Abschnitt Systemen um formale Ausdrücke und keineswegs um „richtige“ Koordinatensysteme. Jedoch kann auch hier gezeigt werden, daß Konsistenz mit den Zerlegungen $\mathcal{P}_n$ durch eine Additionsformel besteht:

Aufgrund der Definition der komplexen Hermite - Polynome mit Parameter über die erzeugende Funktion ergibt sich:

$$\left\{ \sum_{\nu} \sum_{\mu} \bar{t}^{\nu} t^{\mu} H_{\nu, \mu}^*(z_1, \bar{z}_1; \sigma_1^2) \right\} \left\{ \sum_{\rho} \sum_{\kappa} \bar{t}^{\rho} t^{\kappa} H_{\rho, \kappa}^*(z_2, \bar{z}_2; \sigma_2^2) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\sigma_1^2 t \bar{t} + t \bar{z}_1 + \bar{t} z_1} e^{-\sigma_2^2 + t \bar{z}_2 + \bar{t} z_2} = \\
 &= e^{-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t \bar{t} + t \overline{(z_1 + z_2)} + \bar{t} (z_1 + z_2)} = \\
 &= \sum_p \sum_q \bar{t}^p t^q H_{p,q}^*(z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)
 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}
 &\bar{t}^p t^q H_{p,q}^*(z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}; \sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \\
 &= \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^q \bar{t}^{p-k} t^{q-j} H_{p-k,q-j}^*(z_1, \bar{z}_1; \sigma_1^2) \bar{t}^k t^j H_{k,j}^*(z_2, \bar{z}_2; \sigma_2^2),
 \end{aligned}$$

woraus sofort

$$\begin{aligned}
 &H_{p,q}^*(z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \\
 &= \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^q H_{p-k,q-j}^*(z_1, \bar{z}_1; \sigma_1^2) H_{k,j}^*(z_2, \bar{z}_2; \sigma_2^2)
 \end{aligned}$$

folgt.

4. VERALLGEMEINERTE FUNKTIONALE DES KOMPLEXEN WEISSEN RAUSCHENS

4.1 Verallgemeinerte Funktionale

Das nachfolgende Beispiel macht deutlich, warum die Definition verallgemeinerter Funktionaler des komplexen weißen Rauschens naheliegt:

Gegeben ist eine Folge $\{\varphi_k\}$ von Funktionalen aus $\mathcal{H}_{(2,0)}$. Diese Folge konvergiert nicht in $\mathcal{H}_{(2,0)}$ (Konvergenzbegriff: (L_c^2) -Konvergenz). Wird aber dieselbe Folge in $\mathcal{H}_{(2,0)}^{- (2)} \supset \mathcal{H}_{(2,0)}$ betrachtet, zeigt sich, daß $\{\varphi_k\}$ in diesem größeren Raum einen Grenzwert besitzt:

Beispiel: Eine Version der komplexen Brownschen Bewegung sei gegeben durch

$$B(t,z) = \langle z, \chi_{[t \wedge 0, t \vee 0]} \rangle$$

und $\{z_k\}$, $z_k = \{\Delta_{k,j}\}$, sei eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge des $\mathbb{R}^1$ in disjunkte Intervalle.

$$\Delta_{k,j} B(t,z) = B(t_{k,j+1}, z) - B(t_{k,j}, z) = \langle z, \chi_{\Delta_{k,j}} \rangle$$

Das Funktional

$$\varphi_k(z) = \sum_{k,j} K(2) a_{k,j} \left(\frac{\langle z, \chi_{\Delta_{k,j}} \rangle}{|\Delta_{k,j}|} \right)^2 |\Delta_{k,j}|, \quad a_{k,j} \in \mathbb{C},$$

$K(2)$ reelle Konstante,

liegt in $\mathcal{H}_{(2,0)}$. Die Anwendung der Transformation τ auf φ_k liefert $(z \in \mathcal{S}_c)$:

$$(\tau_{\varphi_k})(\zeta) =$$

$$= i^2 C(\zeta) \sum_{k_j} K(2) \bar{a}_{k_j} \iint \zeta(u) \zeta(v) \frac{\chi_{\Delta_{k_j}}(u) \chi_{\Delta_{k_j}}(v)}{|\Delta_{k_j}|^2} du dv |\Delta_{k_j}|.$$

Weiter soll vorausgesetzt werden, daß gilt:

$$K(2) \sum_{k_j} \bar{a}_{k_j} \chi_{\Delta_{k_j}}(u) \longrightarrow f(u) \in L^1_C(\mathbb{R}^1) \quad (\text{für } k \rightarrow \infty).$$

Die Zerlegung $\mathcal{Z}_k$ wird nun so fein gewählt, daß in der letzten Gleichung das Doppelintegral durch eine Riemannsche Doppelsumme bezüglich $\mathcal{Z}_k$ ersetzt werden kann:

$$\begin{aligned} (\tau_{\varphi_k})(\zeta) &= i^2 C(\zeta) K(2) \sum_m \sum_n \sum_{k_j} \bar{a}_{k_j} \zeta(u_m) \zeta(u_n) \times \\ &\quad \times \frac{\chi_{\Delta_{k_j}}(u_m) \chi_{\Delta_{k_j}}(u_n)}{|\Delta_{k_j}|^2} |\Delta_m| |\Delta_n| |\Delta_{k_j}| = \\ &= i^2 C(\zeta) K(2) \sum_n \sum_{k_j} \bar{a}_{k_j} \zeta^2(u_n) \frac{\chi_{\Delta_{k_j}}(u_n)}{|\Delta_{k_j}|^2} |\Delta_n|^2 |\Delta_{k_j}| = \end{aligned}$$

(alle Summanden der Doppelsumme, für die $k_j \neq n$ gilt, verschwinden)

$$= i^2 C(\zeta) K(2) \sum_{k_j} \bar{a}_{k_j} \chi_{\Delta_{k_j}}(u_{k_j}) \zeta^2(u_{k_j}) |\Delta_{k_j}|.$$

Die Zerlegung $\mathcal{Z}_k$ wird nun mit wachsendem k immer feiner, woraus schließlich folgt:

$$(\tau\varphi_k)(\zeta) \longrightarrow i^2 C(\zeta) \int f(u) \zeta^2(u) du.$$

$i^2 C(\zeta) \int f(u) \zeta^2(u) du$ kann aber nicht das Bild eines Funktionals aus $\mathcal{H}_{(2,0)}$ unter der Abbildung τ sein (s. Satz 2.4). Eine andere Schreibweise zeigt den Weg zur Definition verallgemeinerter Funktionale des komplexen weißen Rauschens:

$$i^2 C(\zeta) \int f(u) \zeta^2(u) du = i^2 C(\zeta) \iint f\left(\frac{u+v}{2}\right) \delta(u-v) \zeta(u) \zeta(v) du dv.$$

Der oben beschriebene Grenzübergang

$$(\tau\varphi_k) \rightarrow i^2 C(\zeta) \int f(u) \zeta^2(u) du$$

wurde im Bildraum der Transformation τ durchgeführt. Da τ eine eindeutige Abbildung ist, kann der entsprechende Vorgang auch im Urbildraum betrachtet werden. Bei einem solchen Grenzübergang ergibt sich als Grenzwert einer Folge quadratischer Funktionale des komplexen weißen Rauschens ein Funktional, das nicht mehr in $\mathcal{H}_{(2,0)}$ liegt. Allerdings ist dieser Grenzwert durch die Folge von Funktionalen aus $\mathcal{H}_{(2,0)}$ eindeutig festgelegt; er bekommt den Namen

$$\int f(u) H_{2,0}^*(B^*(u), \bar{B}^*(u); \frac{1}{du}) du$$

und liegt, wie sich später zeigen wird, in $\mathcal{H}_{(2,0)}^{-(2)}$

Bevor der Begriff des verallgemeinerten Funktionals des komplexen weißen Rauschens definiert werden kann, muß noch die folgende Bemerkung gemacht werden:

Für die Einführung verallgemeinerter Funktionale des reellen weißen Rauschens (s. Hida [19]) ist es wesentlich, daß die Transformation τ_r

$$(\tau_{\varphi})(\xi) = \int_{\mathfrak{L}^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} \varphi(x) d\mu(x), \quad \varphi \in (L^2), \quad \xi \in \mathfrak{L},$$

den Raum (L^2) auf einen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern (abgekürzt RKHS = reproducing kernel Hilbert space) abbildet; d.h. (L^2) ist einem RKHS isomorph (s. Hida, Ikeda [7]).

Im Fall des komplexen weißen Rauschens kann der Raum der quadratintegrierbaren Funktionale geschrieben werden als

$$(L_C^2) = (L_X^2) \otimes (L_Y^2) = L^2(\mathfrak{L}^*, \mu_{\sqrt{1/2}}) \otimes L^2(\mathfrak{L}^*, \mu_{\sqrt{1/2}})$$

(s. Hida [16]). Auf dieselbe Weise wie in [18] kann gezeigt werden, daß die Einschränkung von τ auf (L_X^2)

$$(\tau|_{(L_X^2)})(\xi) = \int_{\mathfrak{L}^*} e^{2i\langle x, \xi \rangle} \bar{\Psi}(x) d\mu_{\sqrt{1/2}}(x),$$

$$\Psi \in (L_X^2), \quad \xi \in \mathfrak{L},$$

den Raum (L_X^2) ebenfalls auf einen RKHS abbildet. Dasselbe gilt natürlich für $\tau|_{(L_Y^2)}$ und (L_Y^2) . Dann ist aber auch (L_C^2) , das Tensorprodukt der Räume (L_X^2) und (L_Y^2) , einem RKHS isomorph (s. Aronszajn [1], S. 361).

Nach Satz 2.4 gibt es zu jedem $\varphi \in \mathcal{H}_{(m,n)}$ genau eine Funktion

$$F_{\varphi} \in \hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n), \text{ mit der gilt}$$

$$(\tau\varphi)(\zeta) =$$

$$= i^{m+n} C(\zeta) \int_{\mathbb{R}^{m+n}} F_{\varphi}(u_1, \dots, u_m; u_{m+1}, \dots, u_{m+n}) \times$$

$$\times \zeta(u_1) \cdots \zeta(u_m) \bar{\zeta}(u_{m+1}) \cdots \bar{\zeta}(u_{m+n}) du_1 \cdots du_{m+n}.$$

$(\tau\varphi)(\zeta)$ heißt die Integraldarstellung des Funktionals φ und F_φ ist der Kern der Integraldarstellung.

Im weiteren wird der Begriff des Sobolevraumes der (u.U. gebrochenen) Ordnung m über dem $\mathbb{R}^n$ benötigt (s. Lions, Magenes [26], S. 30):

$$S^m(\mathbb{R}^n) := \{v; v \in \mathcal{L}_C^*(\mathbb{R}^n), (1+|x|^2)^{m/2} \mathcal{F}(v(t)) \in L_C^2(\mathbb{R}^n)\}$$

heißt Sobolevraum der Ordnung m über dem $\mathbb{R}^n$.

Mit der Norm

$$|||v|||_{S^m(\mathbb{R}^n)} := ||(1+|x|^2)^{m/2} \mathcal{F}(v(t))||_{L_C^2(\mathbb{R}^n)}$$

wird $S^m(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum. Der Schnitt

$$\{S^{\frac{m+1}{2}}(\mathbb{R}^m) \otimes S^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)\} \cap \{\hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n)\}$$

wird mit $\hat{S}^{\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$ bezeichnet.

Der Raum $\hat{S}^{\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}}$ ist ein Unterraum von $\hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n)$. Die eineindeutige Transformation τ liefert eine Abbildung des mehrfachen Wiener - Integrals $\mathcal{H}_{(m,n)}$ auf $\hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n)$. Es liegt also nahe, die folgende Definition zu geben:

Definition 4.1:

$$\mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)} := \{\varphi; F_\varphi \in \hat{S}^{\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})\}.$$

Bemerkung: Mit der Norm

$$||\varphi||_{(m,n)} := \sqrt{m!n!} |||F_\varphi|||_{S^{\frac{m+1}{2}} \otimes S^{\frac{n+1}{2}}}$$

ist $\mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)}$ ein Hilbertraum und die Einbettung $\mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)} \subset \mathcal{H}_{(m,n)}$ ist stetig.

Der Dualraum von $\mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)}$, der mit $\mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}$ bezeichnet wird, wird folgendermaßen definiert:

Jedem $G \in \hat{S}^{-\frac{m+1}{2}, -\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$, dem Dualraum von $\hat{S}^{\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$, wird ein φ_G mittels der Abbildung τ^{-1} so zugeordnet, daß

$$\{\varphi_G, \varphi_F\}_{m,n} = m!n! [G, F]_{m,n}$$

für alle $\varphi_F \in \mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)}$ gilt, d.h. $\mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)}$ wird als Raum der Testfunktionale angesehen, woraus sich (s.u.) dann auch der Begriff des verallgemeinerten Funktionals ableitet. Die Funktion

$F \in \hat{S}^{\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$ ist der Kern der Integraldarstellung von φ_F .

$\{\cdot, \cdot\}$ bzw. $[\cdot, \cdot]$ sind die kanonischen Bilinearformen, die

$\mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}$ und $\mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)}$ bzw. $\hat{S}^{\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$ und $\hat{S}^{-\frac{m+1}{2}, -\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$

verbinden. Mit stetigen Einbettungen von rechts nach links gilt also:

$$\mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)} \subset \mathcal{H}_{(m,n)} \subset \mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}.$$

$||\cdot||_{-(m,n)}$ sei die Norm in $\mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}$, die ja durch die Norm in

$\hat{S}^{-\frac{m+1}{2}, -\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$ bestimmt wird:

$$(L_C^2)^+ := \{ \varphi; \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \varphi_{(m-k,k)}, \varphi_{(m-k,k)} \in \mathcal{H}_{(m-k,k)}^{(m)},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m || \varphi_{(m-k,k)} ||_{(m-k,k)}^2 < \infty \}$$

$$(L_C^2)^+ \text{ besitzt die Darstellung } (L_C^2)^+ = \sum_{m=0}^{\infty} \oplus \sum_{k=0}^m \oplus \mathcal{H}_{(m-k,k)}^{(m)}.$$

$$(L_C^2)^- := \text{Dualraum von } (L_C^2)^+.$$

Jedes $\varphi \in (L_C^2)^-$ läßt sich in der Form

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \varphi_{(m-k,k)},$$

$$\varphi_{(m-k,k)} \in \mathcal{H}_{(m-k,k)}^{-(m)}, \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m || \varphi_{(m-k,k)} ||_{-(m-k,k)}^2 < \infty,$$

schreiben.

Definition 4.2:

(a) $\varphi \in (L_C^2)^-$ heißt verallgemeinertes Funktional des komplexen weißen Rauschens.

(b) $\varphi \in \mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}$ heißt verallgemeinertes Funktional des komplexen weißen Rauschens vom Grad (m,n) .

Bei der Behandlung des Beispiels vom Anfang dieses Abschnittes war die Frage offen geblieben, ob das verallgemeinerte

Funktional

$$\int f(u) H_{2,0}^*(B^*(u), \bar{B}^*(u); \frac{1}{du}) du,$$

$$f(u) \in L_C^2(\mathbb{R}^1),$$

tatsächlich in $H_{(2,0)}^{(2)}$ liegt. Diese Lücke soll nun geschlossen werden:

Die τ - Transformierte des betrachteten Funktional ist

$$i^2 C(\zeta) \int f(u) \zeta^2(u) du =$$

$$= i^2 C(\zeta) \iint f\left(\frac{u+v}{2}\right) \delta(u-v) \zeta(u) \zeta(v) du dv.$$

Die Fouriertransformierte des Kerns $F(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}\right) \delta(u-v)$ berechnet sich aus

$$(\mathcal{F}(F), \Psi) = (F, \mathcal{F}(\Psi)) , \Psi \in \mathcal{S}_C(\mathbb{R}^2):$$

$$\mathcal{F}(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-i(ut_1+vt_2)} \Psi(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

es gilt also:

$$(F, \mathcal{F}(\Psi)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iiint \overline{f\left(\frac{u+v}{2}\right) \delta(u-v)} e^{-i(ut_1+vt_2)} \Psi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 du dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iiint f(u) e^{iu(t_1+t_2)} du \Psi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{iu(t_1+t_2)} f(u) du, \Psi(t_1, t_2) \right),$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{F}(F) = \frac{1}{2\pi} \int e^{iu(t_1+t_2)} f(u) du.$$

Nun ist aber

$$F \in S^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2) = \{v; v \in \mathcal{S}_C^*(\mathbb{R}^2), \frac{1}{(1+t_1^2+t_2^2)^{3/4}} \mathfrak{F}(v) \in L_C^2(\mathbb{R}^2)\},$$

weil

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{(1+t_1^2+t_2^2)^{3/4}} \mathfrak{F}(F) \right\|^2 &= \left(\frac{\mathfrak{F}(F)}{(1+t_1^2+t_2^2)^{3/4}}, \frac{\mathfrak{F}(F)}{(1+t_1^2+t_2^2)^{3/4}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{|\int e^{iu(t_1+t_2)} f(u) du|^2}{(1+t_1^2+t_2^2)^{3/2}} dt_1 dt_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{(\int |f(u)| du)^2}{(1+t_1^2+t_2^2)^{3/2}} dt_1 dt_2 < \infty. \end{aligned}$$

Zur Erleichterung der Übersicht sind auf S. 37 die in diesem Unterabschnitt betrachteten Räume zusammengestellt. Das Zeichen $\hookrightarrow$ bedeutet die stetige Einbettung eines Raumes in den anderen. Der Doppelpfeil $\longleftrightarrow$ steht für die eindeutige Zuordnung zweier Räume.

Kerne der Integraldarstellung	$\sqrt{m!n!} \hat{S}^{\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$	$\hookrightarrow$	$\sqrt{m!n!} \hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n)$	$\hookrightarrow$	$\sqrt{m!n!} \hat{S}^{-\frac{m+1}{2}, -\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^{m+n})$
	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
mehrfache komplexe Wiener - Integrale	$\mathcal{H}_{(m,n)}^{(m+n)}$	$\hookrightarrow$	$\mathcal{H}_{(m,n)}$	$\hookrightarrow$	$\mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}$
	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
Integral- darstellung	$\mathcal{D}_{(m,n)}^{(m+n)}$	$\hookrightarrow$	$\mathcal{D}_{(m,n)}$	$\hookrightarrow$	$\mathcal{D}_{(m,n)}^{-(m+n)}$
	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
Funktionale $\mathfrak{L}_C \rightarrow \mathbb{C}$	$\tilde{\mathcal{D}}_{(m,n)}^{(m+n)}$	$\hookrightarrow$	$\tilde{\mathcal{D}}_{(m,n)}$	$\hookrightarrow$	$\tilde{\mathcal{D}}_{(m,n)}^{-(m+n)}$

$$\mathcal{D}_{(m,n)} := \{i^{m+n} C(\zeta) U(\zeta, \bar{\zeta}); U(\zeta, \bar{\zeta}) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{m+n}} F_\varphi(u_1, \dots, u_m; u_{m+1}, \dots, u_{m+n}) \times \\ \times \zeta(u_1) \cdots \zeta(u_m) \bar{\zeta}(u_{m+1}) \cdots \bar{\zeta}(u_{m+n}) du_1 \cdots du_{m+n},$$

$$F_\varphi \in \hat{L}_C^2(\mathbb{R}^m) \otimes \bar{L}_C^2(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{(m,n)} := \{U(\zeta, \bar{\zeta}); i^{m+n} C(\zeta) U(\zeta, \bar{\zeta}) \in \mathcal{D}_{(m,n)}\}.$$

4.2 Komplexe zufällige Maße

Das Beispiel aus Unterabschnitt 4.1 wird folgendermaßen verallgemeinert: Es sei $\{z_k\}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge des $\mathbb{R}^1$, $z_k = \{\Delta_{k,i}\}$. Dann liegt das Funktional

$$\varphi_k(z) =$$

$$= \sum_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} a_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} K(p) \times \\ \times \prod_{j=1}^l \left\{ H_{p_j, 0}^* \left(\frac{\Delta_{k_{i_j}}^B}{|\Delta_{k_{i_j}}|}, \frac{\Delta_{k_{i_j}}^{\bar{B}}}{|\Delta_{k_{i_j}}|}; \frac{1}{|\Delta_{k_{i_j}}|} \right) |\Delta_{k_{i_j}}| \right\}$$

in $\mathcal{H}_{(p,0)}$. Dabei sind $a_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} \in \mathbb{C}$, $K(p)$ ist eine reelle

Konstante und es gilt $\sum_j p_j = p$.

Die Anwendung der Transformation τ liefert ($\zeta \in \mathcal{S}_c$):

$$(\tau \varphi_k)(\zeta) =$$

$$= i^p C(\zeta) \sum_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} \bar{a}_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} K(p) \prod_{j=1}^l \left\{ \frac{\chi_{\Delta_{k_{i_j}}}}{|\Delta_{k_{i_j}}|}, \zeta \right\}^{p_j} |\Delta_{k_{i_j}}| =$$

$$= i^p C(\zeta) \sum_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} \bar{a}_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} K(p) \int \dots \int_{\mathbb{R}^p} \zeta(u_1) \dots \zeta(u_p) \times$$

$$\times \frac{\chi_{\Delta_{k_{i_1}}}(u_1) \cdots \chi_{\Delta_{k_{i_1}}}(u_{p_1}) \chi_{\Delta_{k_{i_1}}}(u_{p_1+p_2+\cdots+p_{l-1}+1}) \cdots \chi_{\Delta_{k_{i_1}}}(u_{\Sigma p_j})}{|\Delta_{k_{i_1}}|^{p_1} \cdots |\Delta_{k_{i_1}}|^{p_l}} \times$$

$$\times du_1 \cdots du_p |\Delta_{k_{i_1}}| \cdots |\Delta_{k_{i_1}}|.$$

Nun wird ein dem aus dem Beispiel aus 4.1 analoger Grenzübergang durchgeführt ($\mathfrak{Z}_k$ so fein, daß das p -fache Integral als p -fache Riemannsche Summe geschrieben werden kann u.s.w.). Unter der Voraussetzung, daß

$$\sum_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} K(p) \bar{a}_{k_{i_1}, \dots, k_{i_l}} \chi_{\Delta_{k_{i_1}}}(u_1) \cdots \chi_{\Delta_{k_{i_l}}}(u_l)$$

für feiner werdende Zerlegungen $\mathfrak{Z}_k$ gegen die Funktion $f(u_1, \dots, u_l) \in L^1_C(\mathbb{R}^l)$ geht, konvergieren die τ -Transformierten $(\tau\varphi_k)$ gegen

$$(\tau\varphi)(\zeta) = i^p C(\zeta) \int_{\mathbb{R}^l} f(u_1, \dots, u_l) \zeta^{p_1}(u_1) \cdots \zeta^{p_l}(u_l) du_1 \cdots du_l.$$

Das Funktional $(\tau\varphi)(\zeta)$ liegt in $\mathfrak{D}_{(p+0)}^{-(p)}$. Analog zu dem Grenzübergang, der in $\mathfrak{D}_{(p+0)}^{-(p)}$ zu dem Funktional $(\tau\varphi)$ geführt hat, wird vermittle der eindeutigen Transformation τ ein entsprechender Grenzübergang in $\mathcal{H}_{(p+0)}^{-(p)}$ betrachtet: Die Folge von Funktionalen $\{\varphi_k\}$, deren Glieder alle in $\mathcal{H}_{(p,0)}$ liegen, konvergiert gegen einen Grenzwert φ , der nicht mehr in $\mathcal{H}_{(p,0)}$, wohl aber in $\mathcal{H}_{(p,0)}^{-(p)}$ zu finden ist. Dieser Grenzwert wird geschrieben als

$$\varphi(z) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^1} f(u_1, \dots, u_l) \prod_{j=1}^l \{H_{p_j, 0}^*(B^*(u_j), \bar{B}^*(u_j); \frac{1}{du_j}) du_j\},$$

u_j verschieden für $j=1, \dots, l$; $\sum_j p_j = p$.

Definition 4.3:

$$\prod_{j=1}^l oM_{p_j}(du_j) := \begin{cases} \prod_{j=1}^l \{H_{p_j, 0}^*(B^*(u_j), \bar{B}^*(u_j); \frac{1}{du_j}) du_j\}, & u_j \neq u_k \\ & \text{für } k \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ergibt sich sofort die wichtige

Folgerung:

$\prod_{j=1}^l oM_{p_j}(du_j)$, $\sum_j p_j = p$, ist ein komplexes zufälliges Maß.

Integrale bezüglich dieses Maßes liegen in $\mathcal{H}_{(p,0)}^{-(p)}$ und es gilt:

$$\tau \left(\prod_{j=1}^l oM_{p_j}(du_j) \right) = K(p) \prod_{j=1}^l \{ \delta_u^{p_j} du_1 \cdots du_{p_j} \}$$

wobei das Maß $\delta_u^p du_1 \cdots du_p$ gegeben ist durch

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^p} f(u_1, \dots, u_p) \delta_u^p du_1 \cdots du_p = \int_{\mathbb{R}^1} f(u, \dots, u) du$$

Definition 4.4:

$\prod_{j=1}^l oM_{p_j}(du_j)$ heißt ein verallgemeinertes komplexes zufälliges Maß.

Bemerkungen (Entsprechendes gilt für den Fall des reellen weißen Rauschens, s. Hida [19]):

- (1) Integrale bezüglich verallgemeinerter komplexer zufälliger Maße werden nicht als Integrale im gewöhnlichen Sinn, sondern als stetige Analoga von Polynomen verstanden.
- (2) Integrale bezüglich $\prod_{j=1}^p \circ M_j(du_j)$ liegen in $\mathcal{H}_{(p,0)}$, d.h. sie sind Elemente des komplexen mehrfachen Wiener - Integrals der Ordnung $(p,0)$.
- (3) Nicht jedes Element von $\mathcal{H}_{(p,0)}^{-(p)}$ kann als Integral bezüglich eines komplexen zufälligen Maßes dargestellt werden.

Um noch zwei von P. Lévy stammende Bezeichnungen einzuführen, folgt die

Definition 4.5:

Ein Funktional der Form

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^p} f(u_1, \dots, u_p) \zeta(u_1) \cdots \zeta(u_p) du_1 \cdots du_p$$

heißt ein reguläres Funktional, während ein Funktional der Gestalt

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^k} f(u_1, \dots, u_k) \zeta^{p_1}(u_1) \cdots \zeta^{p_k}(u_k) du_1 \cdots du_k, \quad \sum_j p_j = p,$$

ein normales Funktional genannt wird.

5. FUNKTIONALE AUF $\mathcal{L}_C$

Aus den Zusammenhängen, die in der Abbildung auf S. 37 dargestellt wurden, ist ersichtlich, daß zwischen den Elementen der Räume der komplexen verallgemeinerten Funktione $\mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}$ und den Elementen der Räume $\tilde{\mathcal{D}}_{(m,n)}^{-(m+n)}$ eine eindeutige Zuordnung besteht. Es ist also möglich, Eigenschaften von Funktionalen aus $\tilde{\mathcal{D}}_{(m,n)}^{-(m+n)}$ zu untersuchen und dann die Ergebnisse auf die entsprechenden Funktione aus $\mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}$ zu übertragen bzw. sie in $\mathcal{H}_{(m,n)}^{-(m+n)}$ zu interpretieren.

Ziel der Untersuchungen in den Abschnitten 5 und 6 ist, eine Differentialrechnung für die komplexen verallgemeinerten Brownschen Funktione aus den Räumen $\mathcal{H}_{(m,0)}^{-(m)}$ vorzuschlagen und einige Ergebnisse herzuleiten. Die entsprechenden Funktione in den Räumen $\tilde{\mathcal{D}}_{(m,0)}^{-(m)}$ sind Abbildungen von $\mathcal{L}_C$ nach $\mathbb{C}$. Die Topologie des Raumes $\mathcal{L}_C$ wurde im Abschnitt 2.1 besprochen.

5.1 Fréchet- und Gâteaux- Differentiale

$U(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{L}_C$, sei ein bezüglich der auf $\mathcal{L}_C$ eingeführten Topologie stetiges Funktional. Ein Funktional heißt linear, wenn es additiv und stetig ist.

Definition 5.1:

$\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ heißt Fréchet - Differential oder Fréchet - Variation von $U(\zeta)$, wenn gilt:

- (i) $\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ ist linear in $\delta \zeta$, $\delta \zeta \in \mathcal{L}_C$,
- (ii) $|U(\zeta + \delta \zeta) - U(\zeta) - \delta U(\zeta; \delta \zeta)| = o(\delta \zeta)$
für $\delta \zeta \rightarrow 0$ in $\mathcal{L}_C$.

Falls das Fréchet - Differential eines Funktionals existiert, ist es gleich dem Gâteaux - Differential dieses Funktionals, das wie folgt definiert wird:

Definition 5.2:

$U(\zeta)$ sei in einer Umgebung des Punktes ζ_0 definiert.

Wenn dann für jedes $\delta\zeta \in \mathfrak{L}_c$ der Differenzenquotient

$$\frac{U(\zeta_0 + \lambda \delta\zeta) - U(\zeta_0)}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

einen wohldefinierten Grenzwert besitzt, gleichgültig auf welche Weise λ gegen Null geht, heißt dieser Grenzwert, $\delta U(\zeta_0; \delta\zeta)$, Gâteaux - Differential oder Gâteaux - Variation von $U(\zeta)$ an der Stelle ζ_0 .

Bemerkung: $U(\zeta)$ kann auch als Funktional $U(\xi, \eta)$ der beiden Veränderlichen ξ und η ($\xi, \eta \in \mathfrak{L}$) aufgefaßt werden, da ja $\zeta = \xi + i\eta$ gilt. Die partiellen Fréchet - bzw. Gâteaux - Differentiale von $U(\xi, \eta)$ bezüglich ξ und η werden dann analog zu den Definitionen 5.1 und 5.2 erklärt.

Das Funktional $U(\zeta)$ heißt ganzes Funktional vom Grad n , wenn $U(\lambda\zeta_1 + \mu\zeta_2)$ in λ und μ ein Polynom vom Grad n ist. Handelt es sich dabei um ein homogenes Polynom, ist U ganz und homogen vom Grad n . Im Spezialfall $n=2$ heißt U dann quadratisches Funktional.

Definition 5.3:

$\delta^2 U(\zeta)$ wird zweite Variation von $U(\zeta)$ genannt, wenn gilt:

(i) $\delta^2 U(\zeta)$ ist ein quadratisches Funktional von $\delta\zeta$,

$$\delta\zeta \in \mathfrak{L}_c,$$

(ii) $U(\zeta + \delta\zeta) - U(\zeta) - \{\delta U + \frac{1}{2}\delta^2 U\} = o((\delta\zeta)^2).$

5.2 Analytische Funktionale von $\mathcal{L}_C$ nach $\mathbb{C}$

Im Abschnitt 5.3 soll der Begriff „analytisches Funktional des komplexen weißen Rauschens im Sinne von Gâteaux“ definiert werden. Zunächst wird daher hier die Theorie analytischer Funktionale, die von $\mathcal{L}_C$ nach $\mathbb{C}$ abbilden, bereitgestellt. Die folgende Darstellung hält sich im wesentlichen an die Arbeit von Taylor [29], zu der allerdings ein wichtiger Unterschied besteht: Taylor betrachtet Funktionale, die von einem Banachraum E in einen Banachraum E' abbilden. Im vorliegenden Fall sind die Funktionale jedoch auf dem Raum $\mathcal{L}_C$, der mit der in Abschnitt 2.1 besprochenen Topologie versehen ist, definiert. Der Topologische Vektorraum $\mathcal{L}_C$ ist zwar vollständig, aber nicht normiert.

Definition 5.4:

$U(\zeta)$ sei auf der offenen Menge $D \subset \mathcal{L}_C$ definiert. $U(\zeta)$ heißt analytisch in D , wenn dieses Funktional stetig in D ist und in jedem Punkt von D ein Gâteaux - Differential besitzt.

Ein Funktional heißt analytisch im Punkt ζ_0 , wenn es in einer ganzen Umgebung von ζ_0 analytisch ist.

Die Grundlage für die Untersuchung analytischer Funktionale liefert der

Satz 5.1:

$U(\zeta)$ sei stetig in der offenen Menge $D \subset \mathcal{L}_C$. $U(\zeta)$ ist genau dann analytisch in D , wenn für jedes $n > 0$ die Funktion $U(a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + \dots + a_n\zeta_n)$, $a_j \in \mathbb{C}$, eine analytische Funktion von $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ für alle $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ und alle $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, für die $a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + \dots + a_n\zeta_n \in D$ gilt, ist.

Beweis: $a_1^0 \zeta_1 + a_2^0 \zeta_2 + \dots + a_n^0 \zeta_n$ sei ein Punkt in D . Wegen der Stetigkeit der Addition und der Multiplikation mit einer komplexen Zahl in $\mathbb{C}$ existieren Zahlen r_j , $1 \leq j \leq n$, so daß für $|a_j - a_j^0| < r_j$, $1 \leq j \leq n$, auch $a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + \dots + a_n \zeta_n$ in D liegt. Die partiellen Ableitungen von $U(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + \dots + a_n \zeta_n)$ nach den a_j sind dann Gâteaux - Differentiale von $U(\zeta)$ an Punkten von D .

Satz 5.2:

Ist $U(\zeta)$ analytisch in D , so besitzt es dort Gâteaux - Differentiale beliebiger Ordnung und das n -te Differential ist symmetrisch in den n Zuwächsen.

Beweis: Die partiellen Ableitungen von $U(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + \dots + a_n \zeta_n)$ nach den a_j sind stetige Funktionen der a_j und bei mehrmaligem Differenzieren darf die Reihenfolge der Differentiationen beliebig gewählt werden.

Der folgende Hilfssatz wird für den Beweis von Satz 5.3 benötigt:

Hilfssatz 5.1:

$U(\zeta; \tau)$ sei ein komplexwertiges Funktional, das für ζ aus der offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ stetig ist. τ sei aus einer kompakten Menge $G \subset \mathbb{C}$. Für $\zeta_0 \in D$ ist $U(\zeta; \tau)$ dann sogar gleichmäßig stetig in ζ_0 bezüglich τ .

Beweis: Die Behauptung sei falsch. Dann existieren ein $\epsilon > 0$ und eine Folge $\{\zeta_n; \zeta_n \in D\}$, $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$, und jedem n kann ein τ_n zugeordnet werden, so daß gilt:

$$|U(\zeta_n; \tau_n) - U(\zeta_0; \tau_n)| > \epsilon \quad \forall n.$$

Als kompakte Menge in $\mathbb{C}$ ist G nach dem Heine - Borelschen Satz

abgeschlossen. D.h. für die Folge $\{\tau_n; \tau_n \in G\}$ kann vorausgesetzt werden, daß $\tau_n \rightarrow \tau_0$, $\tau_0 \in G$, gilt. Daraus folgt für alle n die Ungleichung

$$0 < \varepsilon < |U(\zeta_n; \tau_n) - U(\zeta_0; \tau_n)| \leq \\ \leq |U(\zeta_n; \tau_n) - U(\zeta_0; \tau_0)| + |U(\zeta_0; \tau_0) - U(\zeta_0; \tau_n)|.$$

Wegen der Stetigkeit von U in ζ_0 geht der letzte Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen Null. Damit ist ein Widerspruch konstruiert.

Satz 5.3:

Das Gâteaux - Differential $\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ des analytischen Funktionals $U(\zeta)$ ist ein analytisches Funktional von ζ für festes $\delta \zeta$; außerdem ist es linear (d.h. additiv und stetig) in $\delta \zeta$.

Beweis: a) Zu zeigen: $\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ ist ein analytisches Funktional von ζ .

Sei also $U(\zeta)$ analytisch in $D \subset \mathbb{A}_C$. Wegen Satz 5.2 genügt es, nachzuweisen, daß $\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ für festes $\delta \zeta$ stetig in D ist. Es seien also $\zeta_0 \in D$ und $\delta \zeta \in \mathbb{A}_C$. Dann existieren eine Umgebung $A(\zeta_0)$ von ζ_0 und eine positive reelle Zahl r , so daß für $\zeta \in A(\zeta_0)$ und alle τ , $|\tau| \leq r$, die Funktion $\zeta + \tau \delta \zeta$ in D liegt. $U(\zeta + \tau \delta \zeta)$ ist also für $|\tau| \leq r$ eine analytische Funktion von τ (s. Satz 5.1). Ist C der Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt in $\mathbb{C}$, ergibt sich aus der Cauchyschen Integralformel ($\partial C := \{\tau; |\tau| = r\}$ ist der Rand des Kreises C):

$$U(\zeta; \delta \zeta) = \left. \frac{\partial U(\zeta + \tau \delta \zeta)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{U(\zeta + \tau \delta \zeta)}{\tau^2} d\tau,$$

woraus die Abschätzung

$$|\delta U(\zeta; \delta \zeta) - \delta U(\zeta_0; \delta \zeta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial C} \frac{|U(\zeta + \tau \delta \zeta) - U(\zeta_0 + \tau \delta \zeta)|}{\tau^2} |d\tau|$$

folgt. Die Stetigkeit von $\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ im Punkt ζ_0 ist gesichert, wenn zu jedem $\varepsilon' > 0$ eine Umgebung $B(\zeta_0)$ von ζ_0 existiert, so daß für $\zeta \in B(\zeta_0)$

$$|U(\zeta + \tau \delta \zeta) - U(\zeta_0 + \tau \delta \zeta)| < \varepsilon' \quad \forall \tau \in \partial C$$

gilt. Da ∂C aber kompakt in $\mathbb{C}$ ist, folgt die Behauptung aus Hilfssatz 5.1.

b) Zu zeigen: $\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ ist additiv in $\delta \zeta$.

$\zeta_0 \in D$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; $\delta \zeta_1, \delta \zeta_2 \in \mathcal{L}_C$; $\eta := \alpha \delta \zeta_1 + \beta \delta \zeta_2$.

$U(\zeta_0 + \tau \eta)$ ist eine analytische Funktion von τ an der Stelle $\tau=0$, d.h. es existiert die Entwicklung

$$U(\zeta_0 + \tau \eta) = U(\zeta_0) + \tau \left[\frac{\partial U(\zeta_0 + \tau \eta)}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} + \dots$$

Anders gesehen ist mit $\rho_1 = \tau \alpha$ und $\rho_2 = \tau \beta$ die Funktion der beiden Variablen ρ_1 und ρ_2 $U(\zeta_0 + \rho_1 \delta \zeta_1 + \rho_2 \delta \zeta_2)$ analytisch in $\rho_1 = \rho_2 = 0$:

$$U(\zeta_0 + \rho_1 \delta \zeta_1 + \rho_2 \delta \zeta_2) = U(\zeta_0) +$$

$$+ \tau \alpha \left[\frac{U(\zeta_0 + \rho_1 \delta \zeta_1 + \rho_2 \delta \zeta_2)}{\partial \rho_1} \right]_{\rho_1 = \rho_2 = 0} + \tau \beta \left[\frac{U(\zeta_0 + \rho_1 \delta \zeta_1 + \rho_2 \delta \zeta_2)}{\partial \rho_2} \right]_{\rho_1 = \rho_2 = 0} + \dots$$

Der Vergleich der in τ linearen Glieder beider Entwicklungen liefert:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U(\zeta_0 + \tau \eta)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} &= \\ &= \alpha \left. \frac{\partial U(\zeta_0 + \rho_1 \delta \zeta_1 + \rho_2 \delta \zeta_2)}{\partial \rho_1} \right|_{\rho_1=\rho_2=0} + \beta \left. \frac{\partial U(\zeta_0 + \rho_1 \delta \zeta_1 + \rho_2 \delta \zeta_2)}{\partial \rho_2} \right|_{\rho_1=\rho_2=0} \end{aligned}$$

Dies ist jedoch genau die Gleichung

$$\delta U(\zeta_0; \alpha \delta \zeta_1 + \beta \delta \zeta_2) = \alpha \delta U(\zeta_0; \delta \zeta_1) + \beta \delta U(\zeta_0; \delta \zeta_2).$$

c) Zu zeigen bleibt die Stetigkeit von $\delta U(\zeta_0; \delta \zeta)$, wobei es wegen b) hinreicht, die Stetigkeit an der Stelle $\delta \zeta=0$ nachzuweisen: Sei $\delta \zeta$ aus einer Nullumgebung in $\mathcal{A}_C$ und r so gewählt, daß für alle τ aus $C = \{\tau; |\tau| \leq r\}$ $\zeta_0 + \tau \delta \zeta$ noch in D liegt. Da dann $U(\zeta_0 + \tau \delta \zeta)$ eine analytische Funktion von τ im Kreis C ist, gilt:

$$\delta U(\zeta_0; \delta \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{U(\zeta_0 + \tau \delta \zeta)}{\tau^2} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{U(\zeta_0 + \tau \delta \zeta) - U(\zeta_0)}{\tau^2} d\tau.$$

Aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $U(\zeta)$ in ζ_0 folgt dann die Stetigkeit von $\delta U(\zeta_0; \delta \zeta)$ für $\delta \zeta=0$.

Satz 5.4:

$U(\zeta)$ sei analytisch in D . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- (i) Für feste $\delta \zeta_1, \dots, \delta \zeta_n$ ist $\delta^n U(\zeta; \delta \zeta_1, \dots, \delta \zeta_n)$ ein analytisches Funktional von ζ in D .
- (ii) $\delta^n U(\zeta; \delta \zeta_1, \dots, \delta \zeta_n)$ ist stetig im $(n+1)$ -Tupel $(\zeta; \delta \zeta_1, \dots, \delta \zeta_n)$ für alle Punkte seines Definitionsbereichs.

Beweis: Daß $\delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_n)$ ein analytisches Funktional für $\zeta \in D$ ist und daß es linear für jedes $\delta\zeta_j$, $1 \leq j \leq n$, (einzeln) ist, folgt aus Satz 5.3.

Zu zeigen bleibt (ii): Zuerst wird bewiesen, daß

$\delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_n)$ stetig in $(\zeta; \delta\zeta_1)$ ist. Dazu sei $\tilde{\epsilon} > 0$ vorgegeben, dann können, wegen der Stetigkeit von $\delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_n)$ in ζ und der Stetigkeit des Funktional in $\delta\zeta_1$, Nullumgebungen A und A_1 in $\mathcal{L}_C$ gefunden werden, so daß für $h \in A$ und $h_1 \in A_1$ gilt:

$$\begin{aligned} & |\delta^n U(\zeta+h; \delta\zeta_1+h_1, \delta\zeta_2, \dots, \delta\zeta_n) - \delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \dots, \delta\zeta_n)| \leq \\ & \leq |\delta^n U(\zeta+h; \delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \dots, \delta\zeta_n) - \delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \dots, \delta\zeta_n)| + \\ & + |\delta^n U(\zeta+h; h_1, \delta\zeta_2, \dots, \delta\zeta_n)| < \tilde{\epsilon}. \end{aligned}$$

Anschließend wird genauso die Stetigkeit von

$\delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \dots, \delta\zeta_n)$ für $(\zeta; \delta\zeta_1, \delta\zeta_2)$ gezeigt u.s.w., bis schließlich mit vorgegebenem $\epsilon > 0$ folgt:

$$\begin{aligned} & |\delta^n U(\zeta+h; \delta\zeta_1+h_1, \delta\zeta_2+h_2, \dots, \delta\zeta_{n-1}+h_{n-1}, \delta\zeta_n+h_n) - \\ & - \delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \dots, \delta\zeta_{n-1}, \delta\zeta_n)| \leq \\ & \leq |\delta^n U(\zeta+h; \delta\zeta_1+h_1, \delta\zeta_2+h_2, \dots, \delta\zeta_{n-1}+h_{n-1}, \delta\zeta_n) - \\ & - \delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \dots, \delta\zeta_{n-1}, \delta\zeta_n)| + \\ & + |\delta^n U(\zeta+h; \delta\zeta_1+h_1, \delta\zeta_2+h_2, \dots, \delta\zeta_{n-1}+h_{n-1}, h_n)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung kann wegen der bereits nachgewiesenen

Stetigkeit in $(\zeta; \delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_{n-1})$ und der Stetigkeit in $\delta\zeta_n$ immer erreicht werden.

Folgerung: Das Differential $\delta^n U(\zeta; \delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_n)$ ist für jedes $\zeta \in D$ ein symmetrisches, multilineares Funktional von $\delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_n$. Insbesondere ist

$$\delta^n U(\zeta; \delta\zeta) := \delta^n U(\zeta; \delta\zeta, \dots, \delta\zeta)$$

stetig in $(\zeta; \delta\zeta)$ und homogen vom Grad n in $\delta\zeta$.

Satz 5.5:

$U(\zeta)$ sei analytisch in der Umgebung $D \subset \mathfrak{L}_{\mathbb{C}}$ von ζ_0 .

Dann besitzt $U(\zeta)$ für $\zeta \in D$ die Entwicklung

$$U(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n U(\zeta_0; \zeta), \quad \delta^0 U(\zeta_0; \zeta) = U(\zeta_0).$$

Ist weiter A eine abgeschlossene Untermenge von D , so konvergiert diese Reihe absolut und gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge G von A .

Beweis: O.E.d.A. sei $\zeta_0 = 0$. In $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}$ ist die Multiplikation mit komplexen Zahlen eine stetige Operation, denn $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}$ ist ein topologischer Vektorraum. Das hat zur Folge, daß für jedes $\zeta \in D$ eine Umgebung $V(\zeta)$ von ζ und eine Menge komplexer Zahlen $\Lambda = \{\lambda; |\lambda - 1| < \rho, \rho > 0\}$ existieren, so daß $\{\lambda\zeta; \lambda \in \Lambda, \zeta \in V(\zeta)\} \subset D$. Zusammenfassend ergibt sich: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß mit $\zeta \in D$ auch $(1 + \kappa)\zeta \in D$ für alle $\kappa \in \mathbb{C}$ mit $|\kappa| < \varepsilon$. Da weiter D eine normale Nullumgebung ist, folgt, daß die Menge

$$Z(\zeta) = \{\tau\zeta; |\tau| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}\}$$

ganz in D enthalten ist.

Es sei nun $C = \{\tau; |\tau| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}\}$ der Kreis mit dem Radius $r = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ um den Nullpunkt in $\mathbb{C}$.

Die Funktion $\Psi(\tau) = U(\tau\zeta)$ ist nach Satz 5.1 analytisch in C und es gilt:

$$\Psi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Psi^{(n)}(0), \quad \Psi^{(0)}(0) = \Psi(0).$$

Diese Entwicklung ist gleichwertig zu

$$U(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n U(0; \zeta).$$

Aufgrund der Cauchyschen Integralformel gilt:

$$\frac{1}{n!} \delta^n U(0; \zeta) = \frac{1}{n!} \Psi^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{U(\tau\zeta)}{\tau^{n+1}} d\tau.$$

Ist nun A eine abgeschlossene Teilmenge von D und $G \subset A$, G kompakt, so folgt aus der Kompaktheit des Randes ∂C von C , daß auch die Menge $G^* = \{\tau\zeta; \tau \in \partial C, \zeta \in G\}$ kompakt ist. Die Funktion $|U(\tau\zeta)|$ ist daher (s. Hewitt, Stromberg [5], S. 74) auf G^* beschränkt:

$$|U(\tau\zeta)| \leq M.$$

Es gilt also

$$\left| \frac{1}{n!} \delta^n U(0; \zeta) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial C} \frac{U(\tau\zeta)}{\tau^{n+1}} d\tau \right| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Wegen $r > 1$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n U(0; \zeta)$ absolut und gleichmäßig für $\zeta \in G$.

Satz 5.6:

Die Summanden der Reihe

$$U(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\zeta)$$

seien in der offenen Menge $D \subset \mathcal{L}_C$ analytische Funktionale und die Reihe konvergiere gleichmäßig in jeder kompakten Untermenge jeder abgeschlossenen Teilmenge von D : Die Reihe $U(\zeta)$ konvergiert dann und definiert ein in D analytisches Funktional. Die Gâteaux - Differentiale von $U(\zeta)$ können durch gliedweise Differentiation berechnet werden.

Beweis: a) Zu zeigen: $U(\zeta)$ ist stetig auf D .

ζ_0 sei ein beliebiger Punkt aus D . D ist offen, also liegt mit ζ_0 noch eine ganze Umgebung $V(\zeta_0)$ in D . Als topologischer Vektorraum ist $\mathcal{L}_C$ regulär, d.h. es existiert eine Umgebung $W(\zeta_0)$, für deren Abschluß $\overline{W}(\zeta_0)$ gilt:

$$W(\zeta_0) \subset \overline{W}(\zeta_0) \subset V(\zeta_0) \subset D.$$

Von der Umgebung $W(\zeta_0)$ kann angenommen werden, daß sie beschränkt ist, d.h. sie ist kompakt, weil $\mathcal{L}_C$ vollkommen ist. Insgesamt folgt: Zu jedem $\zeta_0 \in D$ kann eine kompakte Menge gefunden werden, die Umgebung von ζ_0 ist und die selbst ganz in D liegt. Es sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann folgt:

$$(i) \quad \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} \bigwedge_{\zeta \in W(\zeta_0)} \left| \sum_{k=0}^n U_k(\zeta) - U(\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

da $\sum_{k=0}^n U_k$ auf $W(\zeta_0)$ gleichmäßig konvergiert.

(ii) Die U_k ($k=0,1,2,\dots$) sind analytische Funktionale in D ,

d.h. es gilt:

$$\bigvee_{A(\zeta_0) \subset W(\zeta_0)} \bigwedge_{\zeta \in A(\zeta_0)} \left| \sum_{k=0}^{n_0} U_k(\zeta_0) - \sum_{k=0}^{n_0} U_k(\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zusammengefaßt ergibt sich also für alle ζ aus der Umgebung $A(\zeta_0)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |U(\zeta) - U(\zeta_0)| &\leq \left| U(\zeta) - \sum_{k=0}^{n_0} U_k(\zeta) \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=0}^{n_0} U_k(\zeta) - \sum_{k=0}^{n_0} U_k(\zeta_0) \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_0} U_k(\zeta_0) - U(\zeta_0) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

b) Die Reihe $U(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\zeta)$ konvergiert gleichmäßig auf der Umgebung $W(\zeta_0)$. Für beliebiges $\delta\zeta \in \mathcal{L}_C$ existiert eine reelle Zahl $a_0 > 0$, so daß für alle α mit $|\alpha| \leq a_0$ folgt $\zeta_0 + \alpha\delta\zeta \in W(\zeta_0)$. Daraus ergibt sich, daß in $\mathbb{C}$ eine Nullumgebung $B_0 = \{\alpha; |\alpha| \leq a_0\}$ existiert, so daß die Funktion

$$U(\zeta + \alpha\delta\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\zeta + \alpha\delta\zeta)$$

in B_0 gleichmäßig konvergiert. Die $U_k(\zeta + \alpha\delta\zeta)$ sind analytische Funktionen von α , also ist $U(\zeta + \alpha\delta\zeta)$ an der Stelle $\alpha=0$ analytisch. Der Rest des Beweises folgt aus Satz 5.1 und dem Satz von Weierstraß (s. Peschl [27], S. 129).

In der Darstellung

$$U(\zeta) = U_R(\xi, \eta) + iU_I(\xi, \eta)$$

sind $U_R(\xi, \eta)$ und $U_I(\xi, \eta)$ Funktionale von zwei Variablen über $\mathcal{L}$.

Satz 5.7:

$U(\zeta)$ ist genau dann in der offenen Menge $D \subset \mathfrak{L}_c$ analytisch, wenn

- (i) die Funktionale $U_R(\xi, \eta)$ und $U_I(\xi, \eta)$ stetig sind und stetige erste partielle Gâteaux - Differentiale in allen Punkten von D besitzen und
- (ii) die Gleichungen

$$\delta_\xi U_R(\xi, \eta; \delta\rho) = \delta_\eta U_I(\xi, \eta; \delta\rho)$$

$$\delta_\eta U_R(\xi, \eta; \delta\rho) = -\delta_\xi U_I(\xi, \eta; \delta\rho)$$

in D für beliebiges $\delta\rho \in \mathfrak{L}$ erfüllt sind.

Bemerkung: Die beiden Gleichungen aus (ii) werden Cauchy - Riemannsche Differentialgleichungen für Gâteaux - Differentiale genannt.

Beweis von Satz 5.7: a) $U(\zeta)$ sei analytisch in $D \subset \mathfrak{L}_c$.

$U(\zeta)$ ist dann in D stetig und das Gâteaux - Differential $\delta U(\zeta; \delta\zeta)$ ist stetig in ζ , linear in $\delta\zeta$ und stetig in $(\zeta, \delta\zeta)$:

$$\delta U(\zeta; \delta\zeta) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \{U(\zeta + \lambda \delta\zeta) - U(\zeta)\}.$$

Sei speziell $\delta\zeta = \delta\rho + i \cdot 0$, $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$:

$$\delta U(\zeta; \delta\rho) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \{U_R(\xi + l\delta\rho, \eta) - U_R(\xi, \eta)\} +$$

$$+ i \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \{U_I(\xi + l\delta\rho, \eta) - U_I(\xi, \eta)\}.$$

Der links stehende Grenzwert existiert nur, wenn die beiden rechts stehenden Grenzwerte existieren. Es gilt:

$$\delta U(\zeta; \delta \rho) = \delta_{\xi} U_R(\xi, \eta; \delta \rho) + i \delta_{\xi} U_I(\xi, \eta; \delta \rho)$$

Genauso ergibt sich

$$\delta U(\zeta; \delta \rho) = -i \delta_{\eta} U_R(\xi, \eta; \delta \rho) + \delta_{\eta} U_I(\xi, \eta; \delta \rho).$$

Ein Vergleich der beiden letzten Gleichungen liefert die Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen für Gâteaux - Differentiale. Darüber hinaus sind die partiellen Differentiale stetig in $(\xi, \eta; \delta \rho)$ für $\xi + i\eta \in D$ und $\delta \rho \in \mathfrak{L}$ (Linearität in $\delta \rho$!). Daß $U_R(\xi, \eta)$ und $U_I(\xi, \eta)$ stetig sind, folgt aus der Stetigkeit von $U(\zeta)$.

b) $U_R(\xi, \eta)$ und $U_I(\xi, \eta)$ seien nun stetig mit stetigen partiellen Gâteaux - Differentialen an allen Punkten von D und es gelten die Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen für Gâteaux - Differentiale. Ferner seien $\delta \zeta \in \mathfrak{L}_C$ ($\delta \zeta = \delta \xi + i \delta \eta$) beliebig, $\zeta \in D$ und $\lambda = s + it$ eine (betragsmäßig) kleine komplexe Zahl:

$$\begin{aligned} \frac{U(\zeta + \lambda \delta \zeta) - U(\zeta)}{\lambda} &= \\ &= \frac{U_R(\xi + s \delta \xi - t \delta \eta, \eta + t \delta \xi + s \delta \eta) - U_R(\xi, \eta)}{s + it} + \\ &+ i \frac{U_I(\xi + s \delta \xi - t \delta \eta, \eta + t \delta \xi + s \delta \eta) - U_I(\xi, \eta)}{s + it}. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$U_R(s, t, u, v) = U_R(\xi + s \delta \xi - t \delta \eta, \eta + u \delta \xi + v \delta \eta)$$

ist stetig und besitzt in einer Umgebung des Nullpunktes

des $\mathbb{R}^4$ stetige Ableitungen nach allen Variablen. U_R ist dort also total differenzierbar, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} U_R(s, t, u, v) - U_R(0, 0, 0, 0) = \\ s \frac{\partial}{\partial s} U_R \Big|_{(0, 0, 0, 0)} + t \frac{\partial}{\partial t} U_R \Big|_{(0, 0, 0, 0)} + u \frac{\partial}{\partial u} U_R \Big|_{(0, 0, 0, 0)} + \\ + v \frac{\partial}{\partial v} U_R \Big|_{(0, 0, 0, 0)} + \varepsilon(s, t, u, v) \end{aligned}$$

mit
$$\lim_{(s, t, u, v) \rightarrow (0, 0, 0, 0)} \frac{|\varepsilon(s, t, u, v)|}{|s| + |t| + |u| + |v|} = 0.$$

Die letzte Gleichung kann auch unter Verwendung von Gâteaux - Differentialen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} U_R(\xi + s\delta\xi - t\delta\eta, \eta + t\delta\xi + s\delta\eta) - U_R(\xi, \eta) = \\ = s\delta_\xi U_R(\xi, \eta; \delta\xi) - t\delta_\xi U_R(\xi, \eta; \delta\eta) + t\delta_\eta U_R(\xi, \eta; \delta\xi) + \\ + s\delta_\eta U_R(\xi, \eta; \delta\eta) + \varepsilon(s, t, t, s). \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich für $U_I(\xi, \eta)$ mit

$$\lim_{(s, t, u, v) \rightarrow (0, 0, 0, 0)} \frac{|\gamma(s, t, u, v)|}{|s| + |t| + |u| + |v|} = 0 :$$

$$\begin{aligned} U_I(\xi + s\delta\xi - t\delta\eta, \eta + t\delta\xi + s\delta\eta) - U_I(\xi, \eta) = \\ = s\delta_\xi U_I(\xi, \eta; \delta\xi) - t\delta_\xi U_I(\xi, \eta; \delta\eta) + t\delta_\eta U_I(\xi, \eta; \delta\xi) + \\ + s\delta_\eta U_I(\xi, \eta; \delta\eta) + \gamma(s, t, t, s). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen für Gâteaux - Differentiale folgt:

$$\begin{aligned} \frac{U(\zeta + \lambda \delta \zeta) - U(\zeta)}{\lambda} &= \\ &= \{ \delta_{\xi} U_R(\xi, \eta; \delta \xi) - \delta_{\xi} U_I(\xi, \eta; \delta \eta) + i [\delta_{\xi} U_R(\xi, \eta; \delta \eta) + \\ &+ \delta_{\xi} U_I(\xi, \eta; \delta \xi)] \} \frac{s+it}{\lambda} + \frac{\varepsilon+i\gamma}{\lambda} . \end{aligned}$$

Wegen $|\lambda| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (|s| + |t|)$ gilt $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon+i\gamma|}{|\lambda|} = 0$.

$U(\zeta)$ besitzt das Differential

$$\begin{aligned} \delta U(\zeta; \delta \zeta) &= \delta_{\xi} U_R(\xi, \eta; \delta \xi) - \delta_{\xi} U_I(\xi, \eta; \delta \eta) + \\ &+ i [\delta_{\xi} U_R(\xi, \eta; \delta \eta) + \delta_{\xi} U_I(\xi, \eta; \delta \xi)] . \end{aligned}$$

$U_R(\xi, \eta)$ und $U_I(\xi, \eta)$ sind stetig, darum ist auch $U(\zeta)$ stetig. Insgesamt ist damit bewiesen, daß $U(\zeta)$ analytisch in D ist.

Nun muß noch eine Bemerkung über die betrachteten Gâteaux - Differentiale gemacht werden: Ist $U(\zeta)$ analytisch in der offenen Menge $D \subset \mathfrak{A}_C$, dann ist nach Satz 5.3 $\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ ein analytisches Funktional von ζ und es ist linear in $\delta \zeta$; ferner folgt aus Satz 5.4, daß $\delta U(\zeta; \delta \zeta)$ stetig in $(\zeta; \delta \zeta)$ ist: Es sei $\zeta_0 \in D$, $\delta \zeta \in \mathfrak{A}_C$:

$$\begin{aligned} |U(\zeta_0 + \delta \zeta) - U(\zeta_0) - \delta U(\zeta_0; \delta \zeta)| &\leq \\ &\leq |U(\zeta_0 + \delta \zeta) - U(\zeta_0)| + |\delta U(\zeta_0; \delta \zeta)| \rightarrow 0 \quad (\text{für } \delta \zeta \rightarrow 0 \text{ in } \mathfrak{A}_C) . \end{aligned}$$

Mit Definition 5.1 gilt daher der

Satz 5.8:

Ist $U(\zeta)$ an der Stelle ζ_0 analytisch, so besitzt dieses Funktional in einer Umgebung von ζ_0 Fréchet - Differentiale beliebiger Ordnung.

Bemerkung: Die in diesem Unterabschnitt betrachteten Gâteaux - Differentiale sind also tatsächlich Fréchet - Differentiale. Das gilt auch für die partiellen Gâteaux - Differentiale.

5.3 Analytische Funktionale des komplexen weißen Rauschens im Sinne von Gâteaux

Mit $\mathcal{H}^+$ sei der Raum $\sum_{m=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_{(m,0)}^{(m)}$ bezeichnet. Dann ergibt sich aus den Überlegungen von Abschnitt 4.1, daß

$$\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^-$$

ein Gelfandsches Raumtripel ist, in dem $\mathcal{H}$ die Darstellung

$$\mathcal{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_{(m,0)}$$

besitzt und mit $\mathcal{H}^-$ der Dualraum von $\mathcal{H}^+$ bezeichnet wurde.

Jedes Element $\varphi \in \mathcal{H}^-$ besitzt eine Summendarstellung

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{(m,0)}, \quad \varphi_{(m,0)} \in \mathcal{H}_{(m,0)}^{-(m)},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|\varphi_{(m,0)}\|_{-(m,0)}^2 < \infty.$$

Definition 5.7:

Ein Funktional $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{(m,0)} \in \mathcal{H}^-$ heißt ein

analytisches Funktional des komplexen weißen Rauschens
im Sinne von Gâteaux, wenn zu $\{\varphi_{(m,0)}\}$ eine Folge von
Integraldarstellungen $\{i^m C(\zeta) U_m(\zeta)\}$ gehört, so daß

$$\sum_m U_m(\zeta)$$

analytisches Funktional in $\mathcal{L}_c$ ist.

Beispiele: Sei $\{\omega_j\}$ ein VONS in $L_c^2(\mathbb{R}^1)$:

(1) $\langle z, \omega_k \rangle^n$ ist analytisches Funktional des komplexen weißen Rauschens, da

$$U(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\omega_k(u_1) \cdots \omega_k(u_n)} \zeta(u_1) \cdots \zeta(u_n) du_1 \cdots du_n$$

analytisch in $\mathfrak{L}_c$ ist. Damit sind auch alle Polynome über $\{\omega_j\}$ analytische Funktionale des komplexen weißen Rauschens.

$$(2) \varphi(z) = e^{\langle z, \omega_k \rangle} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \langle z, \omega_k \rangle^v$$

$$(\tau\varphi)(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{i^v}{v!} (\omega_k, \zeta)^v C(\zeta).$$

Um zu zeigen, daß $\varphi(z)$ analytisches Funktional des komplexen weißen Rauschens ist, muß also nachgewiesen werden, daß

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} (\omega_k, \zeta)^v$$

analytisch in $\mathfrak{L}_c$ ist:

Sei A eine beliebige kompakte Untermenge von $\mathfrak{L}_c$, dann nimmt die reellwertige Funktion $|(\omega_k, \zeta)|$ auf A ihr Maximum an, das mit a bezeichnet werden soll. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $\zeta \in A$ gilt:

$$\left| \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} (\omega_k, \zeta)^v - \sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} (\omega_k, \zeta)^v \right| \leq \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{1}{v!} |(\omega_k, \zeta)|^v \leq$$

$$\leq \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{a^v}{v!} < \varepsilon,$$

d.h. die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} (\omega_k, \zeta)^v$ konvergiert gleichmäßig auf A.

Da A eine beliebige kompakte Untermenge von $\mathfrak{L}_C$ war und der Schluß also für jede kompakte Untermenge von $\mathfrak{L}_C$ gilt, ist nach Satz 5.6 gezeigt, daß die Reihe ein analytisches Funktional in $\mathfrak{L}_C$ darstellt. $\varphi(z)$ ist also ein analytisches Funktional des komplexen weißen Rauschens im Sinne von Gâteaux.

Bemerkung: Die Definition der analytischen Funktionale des komplexen weißen Rauschens liefert weiter nichts als einige Möglichkeiten, rechnerisch mit den Funktionalen des komplexen weißen Rauschens besser umgehen zu können. Ein Wahrscheinlichkeitstheoretischer Nutzen kann aus dem bisher gesagten nicht gezogen werden, d.h. eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation des Gâteaux - Differentials der Integraldarstellung eines Funktionalen des komplexen weißen Rauschens ist nicht möglich. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß dem weiterführenden Begriff der Funktionalableitung im Sinne von P. Lévy eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung gegeben werden kann.

6. DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONALE DES KOMPLEXEN WEISSEN RAUSCHENS

$U(\zeta)$ sei ein Funktional, das von $\mathfrak{A}_\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ abbildet:

Definition 6.1:

Existiert das Fréchet - Differential des Funktionals $U(\zeta)$ und kann es in der Volterraschen Normalform

$$\delta U(\zeta; \delta \zeta) = \int U'_\zeta(t; \zeta) \delta \zeta(t) dt$$

geschrieben werden, heißt $U'_\zeta(t; \zeta)$ die Funktionalab-
leitung von $U(\zeta)$ im Sinne von P. Lévy.

Bemerkung: Das Funktional $U'_\zeta(t; \zeta)$, das im folgenden kurz als Funktionalableitung bezeichnet werden soll, bildet wieder von $\mathfrak{A}_\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ab.

Definition 6.2:

Ist $\delta U'_\zeta(t; \zeta)$ eine Funktion von t , die die Darstellung

$$\delta U'_\zeta(t; \zeta) = U''_{\zeta^2(t)}(t; \zeta) + \int U'_{\zeta(t)\zeta(s)}(t, s; \zeta) \delta \zeta(s) ds$$

besitzt, heißen $U''_{\zeta^2(t)}(t; \zeta)$ und $U'_{\zeta(t)\zeta(s)}(t, s; \zeta)$ Funktionalableitungen zweiter Ordnung im Sinne von
P. Lévy.

Bemerkung: Wie bereits früher gesagt wurde, sind die Funktionale $U(\zeta)$ als Funktionale $U(\xi, \eta)$ zweier Variabler über $\mathfrak{A}$ zu deuten. Entsprechend den Definitionen 6.1 und 6.2 werden dann erste und zweite partielle Funktionalableitungen

$$U'_{\xi(t)}(t; \xi, \eta), U'_{\eta(t)}(t; \xi, \eta), U''_{\xi^2(t)}(t; \xi, \eta),$$

$$U'_{\xi}(t)\xi(s)(t,s;\xi,\eta), U'_{\eta^2}(t)(t;\xi,\eta), U'_{\eta}(t)\eta(s)(t,s;\xi,\eta)$$

erklärt.

Es sei nun $\varphi(z)$ ein Funktional aus $\mathcal{H}_{(m,0)}^{(m)}$, das dann bekanntlich die Integraldarstellung

$$(\tau\varphi)(\zeta) = i^m C(\zeta) \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int F_{\varphi}(u_1, \dots, u_m) \zeta(u_1) \cdots \zeta(u_m) du_1 \cdots du_m$$

besitzt. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4 gilt:

$$(\tau\varphi)(\zeta) \in \mathcal{D}_{(m,0)}^{(m)}, \quad F_{\varphi} \in \hat{S}^{\frac{m+1}{2}}(\mathbb{R}^m)$$

Zu $\mathcal{D}_{(m,0)}$ gehört der Funktionalraum

$$\tilde{\mathcal{D}}_{(m,0)} = \{U(\zeta); i^m C(\zeta) U(\zeta) \in \mathcal{D}_{(m,0)}\}.$$

Entsprechend wird dem Raum $\mathcal{D}_{(m,0)}^{(m)}$ der Raum $\tilde{\mathcal{D}}_{(m,0)}^{(m)}$ zugeordnet, der genau wie $\mathcal{D}_{(m,0)}^{(m)}$ topologisiert wird.

Jedem $\varphi \in \mathcal{H}_{(m,0)}^{(m)}$ entspricht also genau ein Funktional $U(\zeta) \in \tilde{\mathcal{D}}_{(m,0)}^{(m)}$, dessen Funktionalableitung folgendermaßen berechnet wird:

$$\delta U(\zeta; \delta\zeta) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \{U(\zeta + \lambda \delta\zeta) - U(\zeta)\} =$$

$$= m \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int F_{\varphi}(t, u_2, \dots, u_m) \zeta(u_2) \cdots \zeta(u_m) du_2 \cdots du_m \delta\zeta(t) dt$$

Die Funktionalableitung von $U(\zeta)$ im Sinne von P. Lévy ist also:

$$U'_\zeta(t; \zeta) = m \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{m-1}} F_\varphi(t, u_2, \dots, u_m) \zeta(u_2) \cdots \zeta(u_m) du_2 \cdots du_m.$$

Dies ist (s.o.) ein vom Parameter t abhängiges Funktional. Für festes t wird der Funktionalableitung $U'_\zeta(t; \zeta)$ wieder ein Funktional $Z(t; z)$ des komplexen weißen Rauschens zugeordnet, nämlich:

$$Z(t; z) = \tau^{-1}(i^{m-1} C(\zeta) U'_\zeta(t; \zeta)).$$

Offenbar gilt $Z(t; z) \in \mathcal{H}_{(m-1,0)}^{(m-1)}$ für festes t .

Definition 6.3:

Für festes t heißt

$$\frac{d}{dz(t)} \varphi(z) := Z(t; z)$$

die $\frac{d}{dz(t)}$ - Ableitung von $\varphi(z)$.

Bemerkungen:

- (1) Insgesamt kann $Z(t; z)$ als stochastischer Prozeß mit Werten in $\mathcal{H}_{(m-1,0)}^{(m-1)}$ interpretiert werden.
- (2) Für $\varphi(z, \bar{z}) = \varphi(x+iy, x-iy)$ werden auf dieselbe Weise wie in Definition 6.3 die partiellen Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x(t)}$ und $\frac{\partial}{\partial y(t)}$ erklärt. Sie filtern ebenfalls stochastische Prozesse aus den (L^2_C) - Funktionalen heraus.
- (3) Analog zu Definition 6.3 werden die höheren Ableitungen von Funktionalen des komplexen weißen Rauschens erklärt, wenn die entsprechenden Funktionalableitungen im Sinne

von P. Lévy existieren. So gelten z.B. die Zuordnungen

$$\frac{d^2}{dz(t) dz(s)} \varphi(z) \approx U'_{\zeta(t)\zeta(s)}(t,s;\zeta)$$

$$\frac{d^2}{(dz(t))^2} \varphi(z) \approx U''_{\zeta^2(t)}(t;\zeta)$$

$$\frac{\partial^2}{(\partial x(t))^2} \varphi(x,y) \approx U''_{\xi^2(t)}(t;\xi,\eta) \quad \text{u.s.w..}$$

Beispiele:

- (1) Anwendung des Differentialoperators $\frac{d}{dx(t)}$ auf die stochastische Fläche, die bekanntlich als Funktional des reellen weißen Rauschens dargestellt werden kann: Der Vektor $B(s,x) = (B_1(s,x), B_2(s,x))$, $s \geq 0$, sei die gewöhnliche Brownsche Bewegung in der Ebene. In Anlehnung an die Darstellung einer glatten ebenen Kurve definiert P. Lévy [25] die stochastische Fläche $S(T,x)$ durch

$$S(T,x) = \frac{1}{2} \int_0^T \{B_1(s,x) dB_2(s,x) - B_2(s,x) dB_1(s,x)\}.$$

Das Integral kann nicht für eine bestimmte Realisierung definiert werden. $S(T,x)$ stellt die Fläche dar, die zum Zeitpunkt T von der Brownschen Kurve und der Verbindungsgeraden zwischen dem Nullpunkt und $B(T,x)$ eingeschlossen wird.

Die zweidimensionale Brownsche Bewegung $B(s,x)$ sei gegeben durch

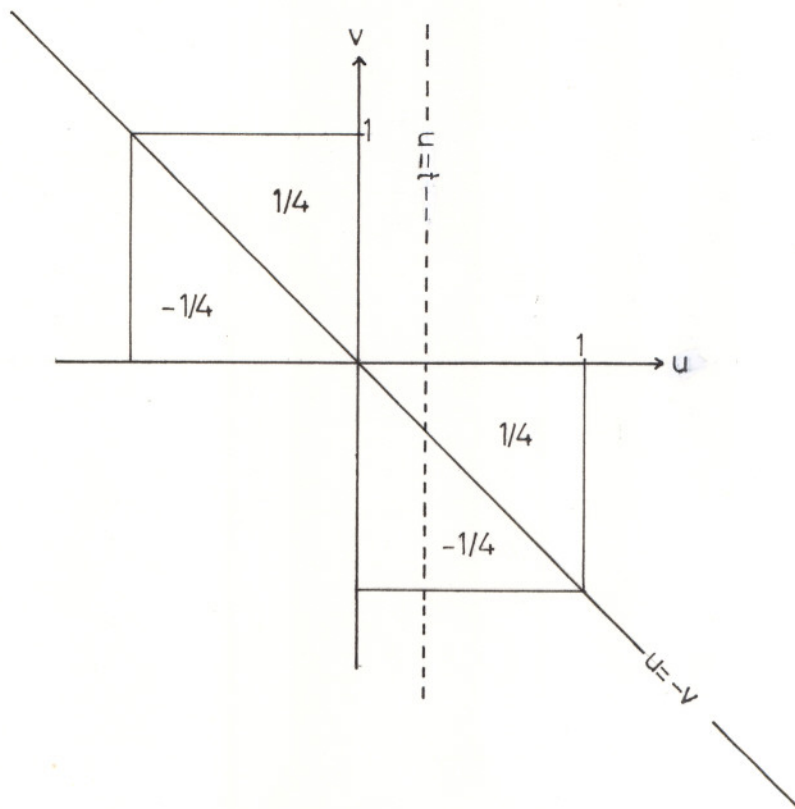
$$B_1(s, x) = \langle x, \chi_{[0, s]} \rangle,$$

$$B_2(s, x) = \langle x, \chi_{[-s, 0]} \rangle, \quad s \geq 0.$$

Das Funktional $S(T, x)$ liegt in dem reellen doppelten Wiener - Integral $\mathcal{H}_2$ (s. Hida [19], § 4.5, Lemma 4.1).

Für $T=1$ ergibt sich der Kern der Integraldarstellung von $S(1, x)$ zu

$$F(u, v) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{für } -1 \leq u \leq 0, \quad 0 \leq v < -u \\ \frac{1}{4} & \text{für } -1 \leq u \leq 0, \quad -u < v \leq 1 \\ -\frac{1}{4} & \text{für } 0 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v < -u \\ \frac{1}{4} & \text{für } 0 \leq u \leq 1, \quad -u < v \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Es gilt (s. Hida [18]):

$$(\tau_r S(1, x))(\xi) = i^2 C_r(\xi) U(\xi).$$

$$\text{mit } U(\xi) = \iint F(u, v) \xi(u) \xi(v) du dv.$$

Die Funktionalableitung von $U(\xi)$ lautet:

$$U'_\xi(t; \xi) = 2 \int F(t, v) \xi(v) dv.$$

Daraus ergibt sich:

a) für $0 < t \leq 1$:

$$U'_\xi(t; \xi) = 2 \left\{ -\frac{1}{4} \int_{-1}^{-t} \xi(v) dv + \frac{1}{4} \int_{-t}^0 \xi(v) dv \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\xi, \chi_{[-t, 0]}) - (\xi, \chi_{[-1, -t]}) \}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\frac{d}{dx(t)} S(1, x) = \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[-t, 0]} \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[-1, -t]} \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[-t, 0]} \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[-1, 0]} \rangle + \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[-t, 0]} \rangle =$$

$$= B_2(t, x) - \frac{1}{2} B_2(1, x) \in \mathcal{H}_1.$$

b) Für $-1 \leq t < 0$:

$$U'_\xi(t; \xi) = 2 \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^{-t} \xi(v) dv + \frac{1}{4} \int_{-t}^1 \xi(v) dv \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\xi, \chi_{[-t, 1]}) - (\xi, \chi_{[0, -t]}) \}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx(t)} S(1,x) &= \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[-t,1]} \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[0,-t]} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[0,1]} \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[0,-t]} \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \chi_{[0,-t]} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} B_1(1,x) - B_1(-t,x) \in \mathcal{H}_1. \end{aligned}$$

c) für $t = 0$:

$$\frac{d}{dx(0)} S(1,x) = -\frac{1}{2} B_2(1,x) + \frac{1}{2} B_1(1,x) \in \mathcal{H}_1.$$

d) für $t \notin [-1,1]$:

$$\frac{d}{dx(t)} S(1,x) = 0 \in \mathcal{H}_1.$$

(2) Anwendung der partiellen Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x(t)}$

und $\frac{\partial}{\partial y(t)}$ auf ein Funktional des komplexen weißen

Rauschens:

Eine Version der komplexen Brownschen Bewegung sei gegeben durch

$$B(t,z) = \langle z, \chi_{[0,t]} \rangle.$$

Dann gilt $\langle z, \chi_{[0,t]} \rangle = \langle x, \chi_{[0,t]} \rangle + i \langle y, \chi_{[0,t]} \rangle$ und

$(\sqrt{2} \langle x, \chi_{[0,t]} \rangle, \sqrt{2} \langle y, \chi_{[0,t]} \rangle)$ ist eine Version der

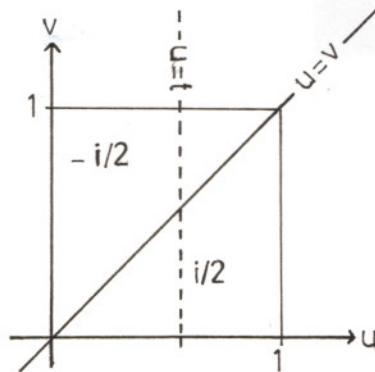
zweidimensionalen Brownschen Bewegung. Die stochastische

Fläche kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$S(T) = \frac{1}{2i} \int_0^T \{ \bar{B}(s) dB(s) - B(s) d\bar{B}(s) \}.$$

Das Funktional $S(1)$ liegt in $\mathcal{H}_{(1,1)}$ (s. Hida [16]) und der Kern seiner Integraldarstellung ist gegeben durch

$$F(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2i} & \text{für } 0 \leq v < u \leq 1 \\ -\frac{1}{2i} & \text{für } 0 \leq u < v \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$



$$F(u,v) = -F(v,u)$$

Die Integraldarstellung ist

$$(\tau S(1))(\zeta) = i^2 C(\zeta) \iint F(u,v) \zeta(u) \bar{\zeta}(v) du dv.$$

Es sollen zunächst die Funktionalableitungen $U'_\xi(t; \zeta, \bar{\zeta})$

und $U'_\eta(t; \zeta, \bar{\zeta})$ des Funktionals

$$U(\zeta, \bar{\zeta}) = \iint F(u,v) \zeta(u) \bar{\zeta}(v) du dv$$

berechnet werden:

$$\delta_\xi U(\zeta, \bar{\zeta}) = \iint F(u,v) \{ \zeta(u) \delta \xi(v) + \bar{\zeta}(v) \delta \xi(u) \} du dv =$$

$$= \iint F(t,v) \{ \bar{\zeta}(v) - \zeta(v) \} dv \delta \xi(t) dt, \text{ woraus folgt:}$$

$$U'_\xi(t; \zeta, \bar{\zeta}) = \int F(t,v) \{ \bar{\zeta}(v) - \zeta(v) \} dv.$$

Entsprechend ergibt sich

$$U'_\eta(t; \zeta, \bar{\zeta}) = i \int F(t, v) \{ \bar{\zeta}(v) + \zeta(v) \} dv.$$

Für $t \notin [0, 1]$ gilt natürlich $U'_\xi(t; \zeta, \bar{\zeta}) = U'_\eta(t; \zeta, \bar{\zeta}) = 0$

und damit auch $\frac{\partial S(1; x, y)}{\partial x(t)} = \frac{\partial S(1; x, y)}{\partial y(t)} = 0$.

Interessanter ist der Fall $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} U'_\xi(t; \zeta, \bar{\zeta}) &= -\frac{1}{2i} \int_0^t \{ \bar{\zeta}(v) - \zeta(v) \} dv + \frac{1}{2i} \int_t^1 \{ \bar{\zeta}(v) - \zeta(v) \} dv = \\ &= \frac{1}{2i} \{ -(\zeta, \chi_{[0, t]}) + (\chi_{[0, t]}, \zeta) + (\zeta, \chi_{[t, 1]}) - (\chi_{[t, 1]}, \zeta) \}, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(1; x, y)}{\partial x(t)} &= \\ &= \frac{1}{2i} \{ -\overline{\langle z, \chi_{[0, t]} \rangle} + \overline{\langle z, \chi_{[t, 1]} \rangle} + \langle z, \chi_{[0, t]} \rangle - \langle z, \chi_{[t, 1]} \rangle \} = \\ &= \frac{1}{2i} \{ -2\overline{\langle z, \chi_{[0, t]} \rangle} + \overline{\langle z, \chi_{[0, 1]} \rangle} + 2\langle z, \chi_{[0, t]} \rangle - \\ &\quad - \langle z, \chi_{[0, 1]} \rangle \} = \end{aligned}$$

$$= i\bar{B}(t, z) - \frac{i}{2}\bar{B}(1, z) - iB(t, z) + \frac{i}{2}B(1, z) \in \mathcal{H}_{(1, 0)} \oplus \mathcal{H}_{(0, 1)}$$

$$U'_\eta(t; \zeta, \bar{\zeta}) = -\frac{1}{2} \int_0^t \{ \bar{\zeta}(v) + \zeta(v) \} dv + \frac{1}{2} \int_t^1 \{ \bar{\zeta}(v) + \zeta(v) \} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \{ -(\zeta, \chi_{[0, t]}) - (\chi_{[0, t]}, \zeta) + (\zeta, \chi_{[t, 1]}) + (\chi_{[t, 1]}, \zeta) \},$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S(1; x, y)}{\partial y(t)} &= \\
 &= \frac{1}{2} \{ \langle z, \chi_{[t, 1]} \rangle - \langle z, \chi_{[0, t]} \rangle + \overline{\langle z, \chi_{[t, 1]} \rangle} - \overline{\langle z, \chi_{[0, t]} \rangle} \} = \\
 &= \frac{1}{2} \{ \langle z, \chi_{[0, 1]} \rangle - 2 \langle z, \chi_{[0, t]} \rangle + \overline{\langle z, \chi_{[t, 1]} \rangle} - \\
 &- 2 \overline{\langle z, \chi_{[0, t]} \rangle} \} = \\
 &= \frac{1}{2} B(1, z) - B(t, z) + \frac{1}{2} \bar{B}(1, z) - \bar{B}(t, z) \in \mathcal{H}_{(1, 0)} \oplus \mathcal{H}_{(0, 1)}.
 \end{aligned}$$

Im folgenden soll nun der unendlichdimensionale Laplace - Operator Δ auf $\mathcal{H}_{(m, 0)}^{-(m)}$ definiert werden.

Sein Definitionsbereich ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\Delta) &= \tau^{-1} \{ i^m C(\zeta) U(\zeta) \in \mathcal{D}_{(m, 0)}^{-(m)}; U_{\xi^2(t)}'', U_{\xi(t)}' \xi(s), \\
 &U_{\eta(t)}' \eta(s), U_{\eta^2(t)}'' \text{ existieren und } U_{\xi^2(t)}'' \text{ und } U_{\eta^2(t)}'' \\
 &\text{ sind } t\text{- integrabel} \}.
 \end{aligned}$$

Definition 6.4:

Der auf $\mathcal{E}(\Delta)$ definierte Operator Δ ,

$$\Delta \varphi(z) = \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2(t)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2(t)} \right) \varphi(z) dt,$$

heißt Lévy - Laplace - Operator.

Definition 6.5:

$\varphi(z)$ heißt harmonisch, wenn gilt

$$\Delta \varphi(z) = 0.$$

Satz 6.1:

Jedes Funktional $\varphi(z) \in \mathcal{H}_{(m,0)}$ ist harmonisch.

Beweis: Es sei $\varphi(z) \in \mathcal{H}_{(m,0)}$, dann besitzt dieses Funktional die Integraldarstellung

$$(\tau\varphi)(\zeta) = i^m C(\zeta) U(\zeta)$$

$$\text{mit } U(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int F_{\varphi}(u_1, \dots, u_m) \zeta(u_1) \cdots \zeta(u_m) du_1 \cdots du_m:$$

$$U'_{\xi}(t; \zeta) = m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \cdots \int F_{\varphi}(t, u_2, \dots, u_m) \zeta(u_2) \cdots \zeta(u_m) du_2 \cdots du_m$$

$$\begin{aligned} \delta U'_{\xi}(t; \zeta) &= m(m-1) \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \cdots \int F_{\varphi}(t, s, u_3, \dots, u_m) \times \\ &\quad \times \zeta(u_3) \cdots \zeta(u_m) du_3 \cdots du_m \delta \xi(s) ds, \end{aligned}$$

woraus $U''_{\xi^2(t)} \equiv 0$ folgt. Entsprechend ergibt sich

$$U''_{\eta^2(t)} \equiv 0, \text{ insgesamt also}$$

$$\int \left(U''_{\xi^2(t)} + U''_{\eta^2(t)} \right) dt = 0, \text{ d.h.}$$

$$\Delta\varphi(z) = \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2(t)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2(t)} \right) \varphi(z) dt = 0.$$

Der Satz 6.1 sagt aus, daß alle Funktionale aus $\mathcal{H}_{(m,0)}^{-(m)}$, deren Integraldarstellung ein reguläres Funktional auf $\mathcal{L}_C$ ist, harmonisch sind. Daher stellt sich die Frage, ob

damit die Klasse der harmonischen Funktionale ausgeschöpft ist. Daß diese Frage verneint werden muß, zeigt folgendes

Beispiel: Sei $\varphi(z) \in \mathcal{H}_{(2,0)}^{-(2)}$ mit der Integraldarstellung

$$(\tau\varphi)(\zeta) = i^2 C(\zeta) \int f(u) \zeta^2(u) du,$$

d.h. $U(\zeta) = \int f(u) \zeta^2(u) du = \int f(u) [\xi + i\eta]^2(u) du = U(\xi, \eta) :$

$$\delta_\xi U(\xi, \eta) = 2 \int f(u) \zeta(u) \delta\rho(u) du$$

$$U'_{\xi(t)}(t; \xi, \eta) = 2 f(t) \zeta(t)$$

$$\delta_\xi U'(t; \xi, \eta) = 2 f(t) \delta\rho(t)$$

$$U''_{\xi^2(t)} = 2 f(t).$$

Entsprechend ergibt sich

$$\delta_\eta U(\xi, \eta) = 2i \int f(u) \zeta(u) \delta\rho(u) du$$

$$U'_{\eta(t)}(t; \xi, \eta) = 2i f(t) \zeta(t)$$

$$\delta_\eta U'(t; \xi, \eta) = -2 f(t) \delta\rho(t)$$

$$U''_{\eta^2(t)} = -2 f(t).$$

Wird nun $f(t)$ so gewählt, daß $\int f(t) dt < \infty$ gilt, folgt

$$\int \left(U''_{\xi^2(t)} + U''_{\eta^2(t)} \right) dt = 0,$$

d.h. mit dieser Bedingung ist $\varphi(z)$ ein harmonisches Funktional des komplexen weißen Rauschens, obwohl seine Integraldarstellung kein reguläres Funktional ist.

Bemerkung: Integrale der Form $\int_0^t z^*(s) ds$, in denen sich $z^*(s)$

wie eine Version des weißen Rauschens, d.h. wie $B^*(s)$, verhält, spielen eine wichtige Rolle in der Quantenphysik im Zusammenhang mit dem Feynmanschen Wegintegral (s. Hida [17], S. 3 und S. 57).

$U(\zeta)$ sei nun das normale Funktional

$$U(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int f(u_1, \dots, u_k) \zeta^{p_1}(u_1) \cdots \zeta^{p_k}(u_k) du_1 \cdots du_k,$$

wobei vorausgesetzt sei, daß ein p_j ($j \in \{1, 2, \dots, k\}$) mit $p_j > 1$ existiert:

$$\begin{aligned} \delta U_{\zeta}(\zeta) &= \sum_{j=1}^k p_j \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int f(u_1, \dots, u_k) \zeta^{p_1}(u_1) \cdots \zeta^{p_{j-1}}(u_{j-1}) \times \\ &\times \zeta^{p_j-1}(u_j) \zeta^{p_{j+1}}(u_{j+1}) \cdots \zeta^{p_k}(u_k) \delta \zeta(u_j) du_1 \cdots du_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U'_{\zeta}(t; \zeta) &= \sum_{j=1}^k p_j \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \cdots \int f(u_1, \dots, u_{j-1}, t, u_{j+1}, \dots, u_k) \times \\ &\times \zeta^{p_1}(u_1) \cdots \zeta^{p_{j-1}}(u_{j-1}) \zeta^{p_j-1}(t) \zeta^{p_{j+1}}(u_{j+1}) \cdots \zeta^{p_k}(u_k) \times \\ &\times du_1 \cdots du_{j-1} du_{j+1} \cdots du_k. \end{aligned}$$

$U'_\zeta(t; \zeta)$ ist also ein Polynom (mindestens ersten Grades) in $\zeta(t)$, dessen Koeffizienten normale Funktionale von $\zeta(u)$ sind. Die Variation dieser Funktionalableitung hat das Aussehen:

$$\delta U'_\zeta(t; \zeta) = U''_{\zeta^2(t)}(t; \zeta) \delta \zeta(t) + \int U''_{\zeta(t)\zeta(s)}(t, s; \zeta) \delta \zeta(s) ds$$

mit $U''_{\zeta^2(t)}(t; \zeta) \neq 0$.

M.a.W. folgt aus der Tatsache, daß $U''_{\zeta^2(t)}$ identisch verschwindet, die Regularität von $U(\zeta)$. Aus dem Beweis von Satz 6.1 ist ersichtlich, daß aus der Regularität von $U(\zeta)$ folgt: $U''_{\zeta^2}(t; \zeta) \equiv 0$. Es gilt also der

Satz 6.2:

$\varphi(z) \in \mathcal{H}_{(m,0)}^{-(m)}$ liegt genau dann in $\mathcal{H}_{(m,0)}$, wenn gilt

$$\frac{d^2}{dz^2(t)} \varphi(z) \equiv 0.$$

Abschließend sei noch die folgende Bemerkung angefügt:
Ein Funktional $\varphi(z) \in \mathcal{H}_{(m,0)}$ besitzt die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} (\tau\varphi)(\zeta) &= i^m C(\zeta) U(\zeta) = \\ &= i^m C(\zeta) \int \cdots \int_{\mathbb{R}^m} F_\varphi(u_1, \dots, u_m) \zeta(u_1) \cdots \zeta(u_m) du_1 \cdots du_m. \end{aligned}$$

Im Falle der Existenz der Funktionalableitungen im Sinne von P. Lévy ergeben sich die zugehörigen Kerne zu

$$U'_\zeta(t) \approx m F_\varphi(t, u_2, \dots, u_m),$$

$$U'_{\zeta}(t)\zeta(s)^{(t,s;\zeta)} \approx m(m-1) F_{\varphi}(t,s,u_3,\dots,u_m)$$

u.s.w.

Hieraus ergibt sich wieder ein konkreter Hinweis darauf, daß es sich bei den mehrfachen Wiener - Integralen nicht um Integrale im gewöhnlichen Sinn sondern um stetige Analoga von Polynomen in den $z(t)$ handelt.

ANHANG

Komplexe Hermite - Polynome

Die aufgeführten Formeln wurden dem Buch [19] von T. Hida entnommen.

(1) Definition

$$H_{p,q}(z, \bar{z}) = (-1)^{p+q} e^{z\bar{z}} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \bar{z}^p \partial z^q} e^{-z\bar{z}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad p, q \geq 0$$

(2) Erzeugende Funktion

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{\bar{t}^p t^q}{p!q!} H_{p,q}(z, \bar{z}) = e^{-t\bar{t} + t\bar{z} + \bar{t}z}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$(3) \quad H_{p,q}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{p \wedge q} (-1)^k \frac{p!q!}{k!(p-k)!(q-k)!} z^{p-k} \bar{z}^{q-k}$$

$$H_{p,q}(z, \bar{z}) = \overline{H_{q,p}(z, \bar{z})}$$

(4) Spezialfälle

$$H_{0,0}(z, \bar{z}) \equiv 1,$$

$$H_{p,0}(z, \bar{z}) = z^p,$$

$$H_{1,1}(z, \bar{z}) = z\bar{z} - 1,$$

$$H_{2,1}(z, \bar{z}) = z^2 \bar{z} - 2z,$$

$$H_{2,2}(z, \bar{z}) = z^2 \bar{z}^2 - 4z\bar{z} + 2,$$

$$H_{3,1}(z, \bar{z}) = z^3 \bar{z} - 3z^2,$$

$$H_{3,2}(z, \bar{z}) = z^3 \bar{z}^2 - 6z^2 \bar{z} + 6z,$$

$$H_{3,3}(z, \bar{z}) = z^3 \bar{z}^3 - 9z^2 \bar{z}^2 + 18z \bar{z} - 6.$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H_{p,q}(z, \bar{z}) - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_{p,q}(z, \bar{z}) + q H_{p,q}(z, \bar{z}) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} H_{p,q}(z, \bar{z}) - z \frac{\partial}{\partial z} H_{p,q}(z, \bar{z}) + p H_{p,q}(z, \bar{z}) = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial z} H_{p,q}(z, \bar{z}) = p H_{p-1,q}(z, \bar{z})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_{p,q}(z, \bar{z}) = q H_{p,q-1}(z, \bar{z})$$

$$(7) \quad H_{p+1,q}(z, \bar{z}) - z H_{p,q}(z, \bar{z}) + q H_{p,q-1}(z, \bar{z}) = 0$$

$$H_{p,q+1}(z, \bar{z}) - \bar{z} H_{p,q}(z, \bar{z}) + p H_{p-1,q}(z, \bar{z}) = 0$$

$$(8) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{p!q!}} H_{p,q}(z, \bar{z}); p \geq 0, q \geq 0 \right\} \text{ ist ein VONS in}$$

$$L^2(\mathbb{C}, \frac{i}{2\pi} e^{-z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z})$$

$$(9) \quad \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} H_{p,q}(x, x) = H_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aronszajn, N.:
Theory of reproducing kernels,
American Math. Society, Transactions, vol. 68, 1950,
S. 337 - 404

- [2] Constantinescu, F.:
Distributionen und ihre Anwendungen in der Physik,
B. G. Teubner, Stuttgart, 1974

- [3] Doob, J. L.:
Stochastic processes,
John Wiley, New York, 1953

- [4] Gelfand, I. M.; Schilow, G. E.; Wilenkin, N. J.:
Verallgemeinerte Funktionen,
Bände 1 - 4, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin, 1960 - 1964

- [5] Hewitt, E.; Stromberg, K.:
Real and abstract analysis,
Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1965

- [6] Hida, T.:
Canonical representation of Gaussian processes and
their applications,
Memoirs Coll. Sci. Univ. Kyoto, A, vol. 33, 1960,
S. 109 - 155

- [7] Hida, T.; Ikeda, N.:
Analysis on Hilbert space with reproducing kernel
arising from multiple Wiener Integral,
Proc. 5- th Berkeley Symp. on Math. Stat. and
Probability, vol. 2, 1967, S. 117 - 143

- [8] Hida, T.; Kubo, I.; Nomoto, H.; Yoshizawa, H.:
On projective invariance of Brownian motion,
Pub. RIMS Kyoto Univ., A, vol. 4, 1968, S. 595 - 609

- [9] Hida, T.:
Harmonic analysis on the space of generalized
functions,
SIAM - Theory of Probability and its Applications,
vol. 15, 1970, S. 117 - 122

- [10] Hida, T.:
Note on the infinite dimensional Laplacian operator,
Nagoya Math. J., vol. 38, 1970, S. 13 - 19

- [11] Hida, T.:
Quadratic functionals of Brownian motion
J. Multivariate Analysis, vol. 1, 1971, S. 58 - 69

- [12] Hida, T.:
Functionals of complex white noise,
Proceedings of Symposium on continuum Mechanics and
related problems of Analysis, vol. 1, Tbilisi (UdSSR),
1973, S. 355 - 366

- [13] Hida, T.:
Analysis of Brownian functionals,
Mathematical Programming Study, vol. 5, 1976, S. 53 - 59

- [14] Hida, T.:
Topics on nonlinear filtering theory,
Multivariate Analysis IV (ed. by P. R. Krishnaiah),
North - Holland Publishing Comp., 1977, S. 239 - 245

- [15] Hida, T.:
White noise and Lévy's functional analysis,
Measure Theory - Applications to Stochastic Analysis
(Tagung Oberwolfach 3. - 9. Juli 1977)
- [16] Hida, T.:
Complex white noise and infinite dimensional unitary
group,
lecture note, Nagoya University, 1971
- [17] Hida, T.:
Analysis of Brownian functionals,
lecture note, Carleton University, Ottawa, 1975
- [18] Hida, T.:
Stationary stochastic processes,
Princeton University Press, 1970
- [19] Hida, T.:
Brownian motion,
Iwanami Publ. Comp., Tokyo, 1975, (in Japanisch)
(die englische Übersetzung dieses Buches erscheint
demnächst im Springer - Verlag)
- [20] Itô, K.:
Multiple Wiener integral,
Journal of the Math. Society of Japan, vol. 3, No.1,
1951, S. 157 - 169
- [21] Itô, K.:
Complex multiple Wiener integral,
Japanese Journal of Mathematics, vol. 22, 1952,
S. 63 - 86

- [22] Itô, K.:
Stationary random distributions,
Memoirs of the College of Science, University of Kyoto,
Series A, vol. 28, 1953, S. 209 - 223

- [23] Kolmogorov, A. N.; Fomin, S. V.:
Reelle Funktionen und Funktionalanalysis,
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975

- [24] Lévy, P.:
Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle,
Gauthier - Villars, Paris, 1951

- [25] Lévy, P.:
Processus stochastique et le mouvement Brownien,
Gauthier - Villars, Paris, 1965

- [26] Lions, J.L.; Magenes, E.:
Non - homogeneous boundary value problems and
applications, vol. I,
Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972

- [27] Peschl, E.:
Funktionentheorie I,
B. I. Hochschultaschenbücher (Band 131/131a),
Mannheim, 1968

- [28] Schwartz, L.:
Théorie des distributions,
Neuaufgabe 1973, Hermann, Paris

- [29] Taylor, A.E.:
Analytic functions in general analysis,
Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (2),
vol. 6, 1937, S. 277 - 292

[30] Yeh, J.:

Stochastic processes and the Wiener integral,
Marcel Dekker, New York, 1973

LEBENS LAUF

Am 29. Mai 1950 wurde ich als Sohn des Bundesbahnbeamten Erich Jondral und seiner Ehefrau Marie, geborene Puchebuhr, in Helmstedt geboren. Ich bin Deutscher.

Vom Frühjahr 1957 an besuchte ich die Volksschule in Königslutter. 1961 wechselte ich zum Gymnasium Julianum in Helmstedt, an dem ich im Juni 1969 die Reifeprüfung bestand. Anschließend leistete ich den Grundwehrdienst bei der Bundeswehr ab.

Vom Wintersemester 1970/71 bis zum Wintersemester 1974/75 studierte ich an der Technischen Universität Braunschweig die Fächer Mathematik und Physik. Ich besuchte Vorlesungen und Seminare der Herren Professoren Bach, Böhm, Bosch, Henze, Jantscher, Justi, Keßler, Kowalsky, P. Meyer, H. R. Müller, K. Müller, Richter und Schwink.

Am 24. Februar 1975 bestand ich die Diplommathematiker - Hauptprüfung. Seit dem 1. März 1975 arbeite ich als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Universität Braunschweig.

Ein durch den Deutschen Akademischen Austauschdienst verliehenes Stipendium gab mir die Möglichkeit, im Wintersemester 1977/78 drei Monate lang an der Universität Nagoya (Japan) zu studieren.

Mein besonderer Dank für die großzügige und hilfreiche Unterstützung, die ich während der Anfertigung der vorliegenden Arbeit erhielt, gilt Herrn Prof. Dr. E. Henze (Braunschweig) und Herrn Prof. Dr. T. Hida (Nagoya). Darüberhinaus danke ich den Herren Prof. Dr. T. Hida, Prof. Dr. M. Hitsuda, Prof. Dr. I. Kubo und Dr. S. Takenaka für viele fruchtbare Diskussionen und die herzliche Aufnahme während meines Aufenthaltes in Japan.

